华东师大版 本社 组编

一课一练

八年级数学（第一学期）增强版

配上海新教材

华东师范大学出版社

本社　组编

华东师大版

一课一练

八年级数学（第一学期）（增强版）

华东师范大学出版社
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

华东师大版一课一练. 八年级数学. 第一学期. 增强版/本社组编. —6版. —上海:华东师范大学出版社,2025. ISBN 978-7-5760-5960-1

Ⅰ. G634

中国国家版本馆CIP数据核字第2025FH4154号

HUADONGSHIDA BAN YIKEYILIAN

华东师大版一课一练

八年级数学(第一学期)(增强版)

组　　编　本　社
总 策 划　孔令志
项目编辑　应向阳
责任编辑　石　战
特约审读　石　岩
责任校对　时东明
装帧设计　刘怡霖
责任发行　余　洁

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　南通印刷总厂有限公司
开　　本　889 毫米×1194 毫米　1/16
印　　张　10.5
字　　数　240 千字
版　　次　2025 年 7 月第 6 版
印　　次　2025 年 7 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5760-5960-1
定　　价　40.00 元

出 版 人　王　焰

如发现图书内容有差错,或有更好的建议,请扫描下面的二维码联系我们。

前　　言

在上海，有一套助学读物，可谓是"家喻户晓"，曾有"家长不买不放心，学生不做不放心"的美誉，她的名字起初叫《一课一练》，后更名为《华东师大版一课一练》，大家更习惯叫她《一课一练》。

《一课一练》于1993年问世，由本社自主策划、组织编写，是一套精准配套中小学课堂教学的辅导书，展现了上海基础教育的教学成果，获得了广大师生和家长的认可。她的品牌影响力从上海扩大至全国，版权输出到海外，走进了英国的中小学课堂，真正实现了文化的"走出去"。上海版《一课一练》涵盖了从小学到高中阶段的主要学科，全国版《一课一练》目前出版了小学阶段部分品种。《一课一练》曾被评为"改革开放30年最具影响力的300本书"之一，三度获得"上海市著名商标"。她已成为上海这座城市的文化名片。

本丛书（上海版《一课一练》）是一套课后练习系统，帮助学生巩固所学内容，题目设计遵循循序渐进、从易到难的原则。配合课时或课文设计的练习，我们通常称为"普通版"；与此对应的"增强版"（在书名上作了标注），是以周或者大节为单位设计的综合练习。"增强版"总体难度高、综合性强，学生可以根据自己的水平选用。

华东师大出版社很早就提出"学术教辅"的理念，并从先进性、原创性、科学性、规范性、教学性、实用性六方面认认真真、扎扎实实地做好教辅出版。这些都支撑着《一课一练》的茁壮成长。著名数学教育家、原普通高中数学课程标准研制组组长张奠宙教授在《一课一练》英国版出版之时曾撰文《学术教辅：一个新的起点》。他认为："'学术教辅（数学）'的终极目标，是要将数学学科内容的学术形态，转化为学生容易理解的教育形态。这种转化，要能高屋建瓴地展现数学内容的本质，恰如其分地符合学生的认知规律……"他强调："熟能生巧，数学是要动手做题的。基本知识要熟悉，基本技能要熟练，非有一定强度的练习不可。一课一练，就是这种优良数学教育传统的体现。"

优秀的作者团队是立书之本。在《一课一练》的作者队伍中，教研专家是核心，他们对整体的内容有很好的把握，又有很强的协调编写团队的能力。来自教学一线的优秀教师是编写的主力，他们熟悉教材内容，了解教学动态，掌握学生情况，关注考试变化，保证了书稿的质量。参加编写的还有一些大学教师，他们是学科教育专家，为《一课一练》更上一层楼奠定了基础。

《一课一练》的品种不断拓展延伸，《一课一练》的内容始终与时俱进，《一课一练》的形态持续迭代更新，不变的是坚持学术教辅的出版理念，作者和编辑团队的工匠精神，以及服务教育的出版初心。

愿在你的成长中，《一课一练》与你一路相伴！

华东师范大学出版社教辅分社

目　　录

第 19 章　实数

第一周　算术平方根　平方根　立方根

一、选择题

1 算术平方根是它本身的数是（　　）。

（A）0　　（B）1　　（C）±1　　（D）0 和 1

2 若 $a^2=16$，$\sqrt[3]{b}=-2$，则 $a+b=$（　　）。

（A）-4　　（B）-12　　（C）-4 或 -12　　（D）±4 或 ±12

3 若 x、y 满足 $|x+2|+\sqrt{y-2}=0$，则 $\left(\frac{x}{y}\right)^{2025}$ 的值为（　　）。

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

4 下列说法中，正确的是（　　）。

（A）27 的立方根是 3，记作 $\sqrt{27}=3$　　（B）-25 的算术平方根是 5

（C）a 的三次方根是 $\pm\sqrt[3]{a}$　　（D）正数 a 的算术平方根是 $\sqrt{a}$

5 下列说法中，错误的是（　　）。

（A）9 的算术平方根是 3　　（B）$\sqrt{81}$ 的平方根是 ±3

（C）8 的立方根是 ±2　　（D）-1 的立方根是 -1

6 地理兴趣小组的同学们准备动手制作地球仪，根据球体体积公式 $v=\frac{4\pi R^3}{3}$（R 为球体半径），经计算可知，若地球仪体积为 $\frac{40\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$，则半径为 $\sqrt[3]{10}\approx2.154$（cm），若地球仪体积为 $\frac{400\pi}{3}$，则半径为 $\sqrt[3]{100}\approx4.642$（cm）。已知同学们准备制作的地球仪的体积为 $\frac{40\,000\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$，则半径约为（　　）。

（A）2.154 cm　　（B）21.54 cm　　（C）4.642 cm　　（D）46.42 cm

二、填空题

7 $\sqrt{16}$ 的平方根是________。

8 如果 $\sqrt{1-3x}$ 和 $\sqrt{y-27}$ 互为相反数，那么 $\sqrt{xy}$ 的平方根是____________。

9 已知 $2x+1$ 是 49 的算术平方根，$x+4y-10$ 的立方根是 -3，则 $y-x$ 的立方根是________。

10 观察：$\sqrt{5}\approx2.236$，$\sqrt{50}\approx7.071$，$\sqrt[3]{6.137}\approx1.8308$，$\sqrt[3]{6137}\approx18.308$。填空：

① $\sqrt{0.5}\approx$________；

② 若 $\sqrt[3]{x}\approx-0.18308$，则 $x\approx$________。

11 已知 $\left|\frac{2}{3}a\right|$ 的算术平方根是 2，-2 是 $2+b$ 的立方根，则 $a-b$ 的平方根是________。

12 已知 $(a-9)^2+|b-4|=0$,则$\frac{\sqrt[3]{a}}{b}$的立方的平方根是 ________。

13 $\sqrt[3]{(-1)^5}-\sqrt{4^3}+\sqrt[3]{8^2}=$ ________。

14 已知 x、y 满足 $y-\sqrt{x-3}=\sqrt{6-2x}+8$,则 $x+3y$ 的立方根为 ________。

15 如果 a、b、c 是正数,且满足 $a+b+c=10$,$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{11}{10}$,那么$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$的立方根为 ________。

16 如果$\sqrt[3]{200a}$是一个整数,那么最大的负整数 a 是________。

17 已知 $\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$,则 a 的值为 ________。

18 一个数的立方根恰好等于这个数的算术平方根的一半,那么这个数是 ________。

三、解答题

19 (1) 已知 $\sqrt{2x-4y-5}+|2x-3|=0$,求 $x+y$ 的平方根;

(2) 已知 a、b 满足 $\sqrt{2a+8}+|b-\sqrt{3}|=0$,解关于 x 的方程$(a+2)x^2-b^2=a-1$。

20 若 $\sqrt{a^2-1}+(b-3)^2+|c-2|=0$,求$(a-b+c)^3$ 的值。

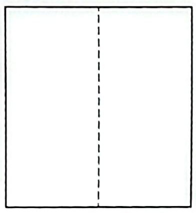
21 设有理数 a、b、c 满足 $(2-a)^2+\sqrt{a^2+b+c}+|c+8|=0$，$ax^2+bx+c=0$，求 x^2+2x 的算术平方根。

22 已知 $A=\sqrt[m-n]{m+n+3}$ 是 $m+n+3$ 的算术平方根，$B=\sqrt[m-2n]{m+2n}$ 是 $m+2n$ 的立方根，求 $B-A$ 的值。

23 如图所示的正方形纸板是由两张大小相同的长方形纸板拼接而成的，已知一个长方形纸板的面积为 162 平方厘米。

(1) 求正方形纸板的边长；

(2) 若将该正方形纸板进行裁剪，然后拼成一个体积为 343 立方厘米的正方体，求正方形纸板剩余部分的面积。



（单位：厘米）

第 23 题图

24 已知 a、b、c 满足 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+a^2+c^2=2+2ac$，求 $a-b+c$ 的值。

25 若有理数 x、y、m 满足关系式：

$$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y},$$

试确定 m 的值。

第二周　有理数的小数形式　无理数

一、选择题

1 设面积为 13 的正方形的边长为 a，下列关于 a 的四种说法：①a 是有理数；②a 是无理数；③a 是 13 的算术平方根；④$3<a<4$，其中说法正确的是(　　)。

(A) ②③④　　(B) ②④　　(C) ①③④　　(D) ①③

2 下列说法正确的是(　　)。

(A) -4 是 16 的一个平方根　　(B) 两个无理数的和一定是无理数

(C) 无限小数是无理数　　(D) 0 没有算术平方根

3 已知 a 是有理数，b 是无理数，下列算式的结果必定为无理数的是(　　)。

(A) $a+b$　　(B) ab

(C) $\dfrac{a}{b}$　　(D) $\sqrt{a^2+b^2}$

4 关于$\sqrt{10}$的叙述，错误的是(　　)。

(A) $\sqrt{10}$是有理数　　(B) 面积为 10 的正方形边长是$\sqrt{10}$

(C) $\sqrt{10}$是无限不循环小数　　(D) 在数轴上可以找到表示$\sqrt{10}$的点

5 下列说法中，正确的是(　　)。

(A) 无理数是用根号形式表示的数

(B) 无限小数是无理数

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$不是分数

(D) π 是无理数，所以无理数也可能是有限小数

6 如图是嘉琪的作业，他的得分是(　　)。

判断题(每小题 20 分)。姓名：嘉琪

1. -1 没有平方根。(√)
2. $\sqrt{5}-2$ 的相反数是 $-2+\sqrt{5}$。(×)
3. 27 的立方根是 ±3。(√)
4. 近似数 0.618 精确到了百分位。(×)
5. $\sqrt[3]{9}$是一个大于 2 的无理数。(×)

第 6 题图

(A) 40 分　　(B) 60 分　　(C) 80 分　　(D) 100 分

二、填空题

7 把下列小数化成分数。

(1) $0.\dot{7}=$________；(2) $0.4\dot{6}=$________；(3) $0.0\dot{1}\dot{2}=$________。

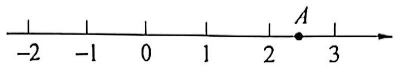
8 把下列分数化成小数。

(1) $\frac{23}{64}=$________；(2) $\frac{5}{18}=$________；(3) $\frac{22}{7}=$________。

9 比较下列各组数的大小。(填“>”“<”或“=”)

(1) $1\frac{1}{6}$________$1.1\dot{6}$；(2) $-2\frac{2}{3}$________-2.45。

10 若点 A 在数轴上的位置如图所示，则点 A 在数轴上表示的无理数可能是________。(只填一个)



第 10 题图

11 已知 M 是满足不等式 $-\sqrt{2}<a<\pi$ 的所有整数 a 的和，则 M 的平方根为________。

12 已知 a 为无理数，且 $ab+\sqrt{2}a-b=\sqrt{2}$，则 $b=$________。

13 在 1，2，3，…，100 这 100 个自然数的算术平方根和立方根中，无理数有________个。

14 若 $\sqrt{a-5}$ 是一个无理数，$\sqrt{a+3}$ 是一个有理数，请写出一个符合条件的 a 的值：________。

15 已知 a、b 为两个连续整数，且 $a<\sqrt{17}<b$，则 $a+b=$________。

16 已知 $y=\sqrt{2x-4}+\sqrt{2-x}+3$，则 $x+y$ 的平方根是________。

17 三角形的两条边长分别为 4 和 $\sqrt{22}$，若第三条边长为整数，则第三条边长的最大值为________。

18 若 $x=\sqrt{2025}-1$，则 $x^2+2x+1576$ 的平方根是________。

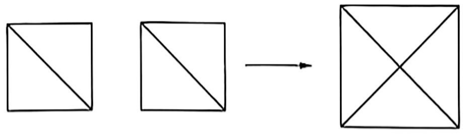
三、解答题

19 已知 $a+2$ 的立方根是 3，$3b-5$ 的算术平方根是 4，c 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分。

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 求 $3a-2b+c$ 的平方根。

20 小华家新买了一张桌子，其桌面是边长为 1.4 m 的正方形，原有的边长是 1 m 的两块正方形台布都不适用了，但扔掉太可惜，小华想了一个办法，按如图所示的方式将两块台布拼成一块正方形大台布，这块大台布能盖住现在的新桌子吗？



第 20 题图

21 (1) 已知 a 是 $\sqrt{10}$ 的整数部分，b 是它的小数部分，求 $(-a)^3+(b+3)^2$ 的值。

(2) 已知 m、n 都是有理数，且 $(\sqrt{3}-1)m+2n=\sqrt{3}+3$，求 $m+n$ 的平方根。

22 已知 x、y 满足关系式 $\sqrt{4x-y^2+1}+|y^2-9|=0$。

(1) 求 x、y 的值；

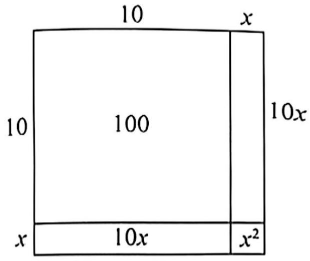
(2) 判断 $\sqrt[x]{y+6}$ 是有理数还是无理数，并说明理由。

23 下面是小李同学探索$\sqrt{107}$的近似数的过程：

因为面积为 107 的正方形边长是$\sqrt{107}$，且 $10<\sqrt{107}<11$，所以设$\sqrt{107}=10+x$，其中 $0<x<1$，画出如图示意图，

因为图中$S_{正方形}=10^2+2\times10\cdot x+x^2$，$S_{正方形}=107$，

所以 $10^2+2\times10\cdot x+x^2=107$，当$x^2$较小时，省略$x^2$，得 $20x+100\approx107$，得到 $x\approx0.35$，即$\sqrt{107}\approx10.35$。



第 23 题图

(1) $\sqrt{76}$的整数部分是________；

(2) 仿照上述方法，探究$\sqrt{76}$的近似值。（画出示意图，标明数据，并写出求解过程）

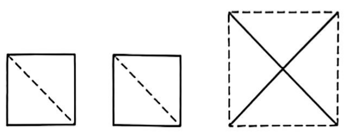
24 阅读与思考

下面是小敏同学学习实数之后整理的一篇数学日记，请仔细阅读，并完成相应的任务。

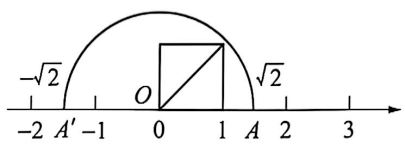
*年*月*日　星期二　晴

无理数与线段长

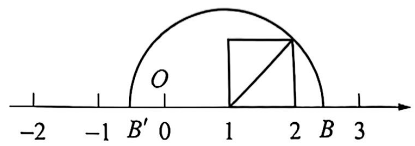
回顾梳理：要在数轴上找到表示$\pm\sqrt{2}$的点，关键是在数轴上构造线段 $OA=OA'=\sqrt{2}$。如图①，把两个边长为 1 的小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，可以得到一个面积为 2 的大正方形，面积为 2 的大正方形的边长就是原边长为 1 的小正方形的对角线长，因此可得小正方形的对角线长为$\sqrt{2}$；由此我们得到一种在数轴上找到无理数的方法：如图②，正方形的边长为 1 个单位长度，以原点 O 为圆心，对角线长为半径画弧与数轴分别交于点 A、A'，则点 A 对应的数为$\sqrt{2}$，点 A'对应的数为$-\sqrt{2}$。



第 24 题图①



第 24 题图②



第 24 题图③

类比思考：如图③，改变图②中正方形的位置，以数字 1 所在的点为圆心，用类似的方法作图，可在数轴上构造出线段 OB 与 OB'，其中 O 仍在原点，点 B、B'分别在原点的右侧、左侧，可由线段 OB 与 OB'的长得到点 B、B'所表示的无理数！

按照这样的思路，只要构造出特定长度的线段，就能在数轴上找到无理数对应的点！

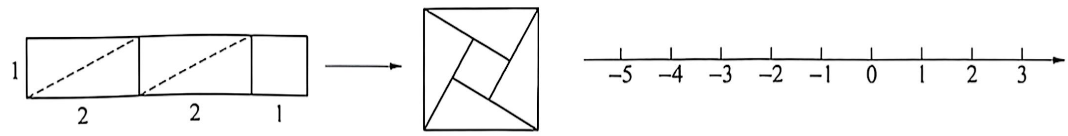
任务：

(1) 上述材料中说明问题的方式主要体现了下列哪种数学思想________。

(A) 方程思想　　　　　　(B) 数形结合思想　　　　　　(C) 化归思想

(2) “类比思考”中，线段 OB 的长为________，OB' 的长为________，则点 B 表示的数为________，点 B' 表示的数为________。

(3) 拓展思考：通过动手操作，小敏同学把长为 5，宽为 1 的长方形进行裁剪，拼成如图④所示的正方形，则请借鉴材料中的方法在数轴上找到表示 $\sqrt{5}-1$ 的点 P。(保留作图痕迹并标出必要线段长)



第 24 题图④

25 阅读下面的文字，解答问题。

如果无理数 x 满足 $m<x<m+1$(其中 m 是整数)，那么称 $(m, m+1)$ 为无理数 x 的“相邻区间”。例如，因为 $1^2<(\sqrt{3})^2<2^2$，所以 $1<\sqrt{3}<2$，所以称 $(1, 2)$ 为 $\sqrt{3}$ 的“相邻区间”。

请解答下列问题：

(1) 求无理数 $\sqrt{8}$ 的“相邻区间”；

(2) 已知 $(1+\sqrt{3})$ 的“相邻区间”是 $(m, m+1)$，且 $m+a=1-\sqrt{3}$，求 a 的值；

(3) 已知 y 是正整数，若 $4<y+\sqrt{y}<5$，求 y 的值。

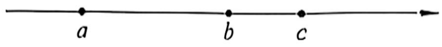
第三周　实数与数轴　实数的绝对值和大小比较

一、选择题

1. 估计 $\sqrt{12}-2$ 的值应在(　　)。

(A) -1 和 0 之间　(B) 0 和 1 之间　(C) 1 和 2 之间　(D) 2 和 3 之间

2. 实数 a、b、c 在数轴上对应的点的位置如图所示。如果 $a+b=0$，那么下列结论正确的是(　　)。

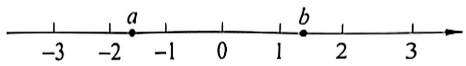


第 2 题图

(A) $|a|>|c|$　(B) $a+c<0$

(C) $abc<0$　(D) $\dfrac{a}{b}=1$

3. 实数 a、b 在数轴上的位置如图所示，化简 $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是(　　)。



第 3 题图

(A) -2　(B) 0

(C) $-2a$　(D) $2b$

4. 比较 3、$\sqrt{10}$、$\sqrt[3]{25}$ 的大小，正确的是(　　)。

(A) $3<\sqrt{10}<\sqrt[3]{25}$　(B) $3<\sqrt[3]{25}<\sqrt{10}$

(C) $\sqrt[3]{25}<3<\sqrt{10}$　(D) $\sqrt{10}<\sqrt[3]{25}<3$

5. 已知 $\min\{a, b, c\}$ 表示取三个数中最小的那个数。例如：当 $x=-2$ 时，$\min\{|-2|, (-2)^2, (-2)^3\}=-8$，当 $\min\{\sqrt{x}, x^2, x\}=\dfrac{1}{16}$ 时，则 x 的值为(　　)。

(A) $\dfrac{1}{16}$　(B) $\dfrac{1}{8}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

6. 有下列说法：

① 如果一个数的立方根等于它本身，那么它一定是 1 或 0；②无限小数都是无理数；③实数与数轴上的点一一对应；④$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$是分数；⑤近似数 5.60 所表示的准确数 x 的范围是：$5.55\leqslant x<5.65$。

其中正确的个数是(　　)。

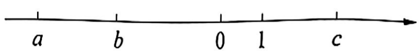
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

二、填空题

7. 已知 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分是 x，小数部分是 y，则 $x-y$ 的相反数为_______。

8. 已知 m 为$\sqrt{55}$的整数部分，则 m 的平方根为_________。

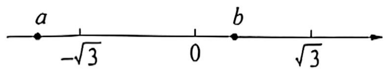
9. 已知在数轴上与实数 a、b、c 对应的点如图所示，则 $\dfrac{a-b}{|a-b|}-\dfrac{b-c}{|b-c|}+\dfrac{c-a}{|c-a|}+\dfrac{ab-ac}{|ab-ac|}$ 的值为_______。



第 9 题图

10 $\sqrt{13}$的整数部分记为 a，算术平方根等于本身的正整数记为 b，那么 $7a+6b$ 的立方根是_________。

11 实数 a、b 在数轴上所对应的点如图所示，则化简 $|\sqrt{3}-b|+|a+\sqrt{3}|+\sqrt{a^2}$ 的结果为_________。



第 11 题图

12 已知 $44^2=1936$，$45^2=2025$，$46^2=2116$，$47^2=2209$。若 n 为整数且 $n<\sqrt{2026}<n+1$，则 n 值为_________。

13 设 n 为正整数，且 $n<\sqrt{65}-1<n+1$，则 n 的值为_________。

14 数轴上点 A 表示的数为 1，点 B、C 分别位于点 A 的两侧，且到点 A 的距离相等。已知点 B 到原点的距离为$\sqrt{2}$，则点 C 表示的数是_________。

15 已知 a、b、n 均为正整数。

(1) 若 $n<\sqrt{10}<n+1$，则 $n=$_______；

(2) 若 $n-1<\sqrt{a}<n$，$n<\sqrt{b}<n+1$，则满足条件的 a 的个数总比 b 的个数少_______个。

16 $|x+1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值是_________。

17 有三个数 a、b、c，其中 a 没有平方根，$\sqrt{b}>b$，$\sqrt{c}<c$，则这三个数从小到大的排列为：_______ $<$ _______ $<$ _______。

18 整数 a、b、c 满足 $1000a+10\times\sqrt[3]{b}+c^2=2024$，其中 $a>1$，$|b|<100$，则 abc 的最大值是_________。

三、解答题

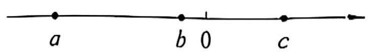
19 已知 $3a-7$ 的立方根是 2，$4a-b-9$ 的算术平方根是 3，c 是$\sqrt{15}$的整数部分。

(1) 求 a、b、c 的值；

(2) 求 $2a+6b-2c$ 的平方根。

20 (1) 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3，$a+3b-1$ 的算术平方根是 4，求 $ab+7$ 的立方根；

(2) 实数 a、b、c 在数轴上的对应点的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt[3]{b^3}$。



第 20 题图

21 根据下表回答下列问题：

x	17	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9	18
x^2	289	292.41	295.84	299.29	302.76	306.25	309.76	313.29	316.84	320.41	324

(1) 295.84 的算术平方根是________，316.84 的平方根是________；

(2) $\sqrt{299.3}\approx$ ________；(保留一位小数)

(3) $\sqrt{29241}=$________，$\sqrt{3.1329}=$________；

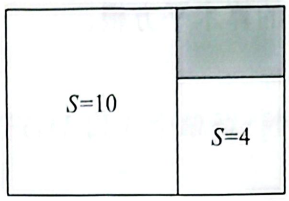
(4) 若 $\sqrt{n}$ 介于 17.6 与 17.7 之间，则满足条件的整数 n 有________个；

(5) 若 $\sqrt{325}$ 这个数的整数部分为 m，求 $\sqrt{3m-5}-(m-16)^3$ 的值。

22 如图,长方形内部有两个相邻的正方形,面积分别为 10 和 4。

(1) 请计算阴影部分的面积。

(2) 请计算阴影部分的周长,并估计该周长最接近哪个整数。

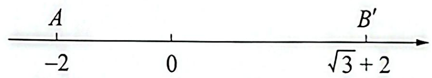


第 22 题图

23 我们规定,对数轴上的任意点 P 进行如下操作:先将点 P 表示的数乘以 -1,再把所得数对应的点向右平移 2 个单位,得到点 P 的对应点 P'。现对数轴上的点 A、B 进行以上操作,分别得到点 A'、B'。

(1) 若点 A 对应的数是 -2,则点 A' 对应的数 $x=$________;若点 B' 对应的数是 $\sqrt{3}+2$,则点 B 对应的数 $y=$________;

(2) 在(1)的条件下,求代数式 $\sqrt{\frac{1}{x}}-\left(y+\frac{1}{2}\right)$ 的值。



第 23 题图

华东师大版一课一练

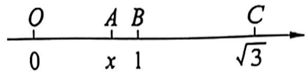
24 (1) 已知 $\sqrt[3]{8a+15}$ 与 $\sqrt[3]{4b+17}$ 互为相反数，求 $2a+b$ 的立方根；

(2) 已知 $\sqrt{2a-1}=3$，$3a+b-1$ 的平方根是 ± 4，c 是 $\sqrt{60}$ 的整数部分，求 $a+2b+c$ 的算术平方根。

25 如图，在数轴上点 O、B、C 所表示的数分别为 0、1、$\sqrt{3}$，点 B 到点 C 的距离与点 O 到点 A 的距离相等。设点 A 所表示的实数为 x。

(1) 求出实数 x 的值；

(2) 求 $(x-\sqrt{3})^2+(x+1)^2$ 的值。



第25题图

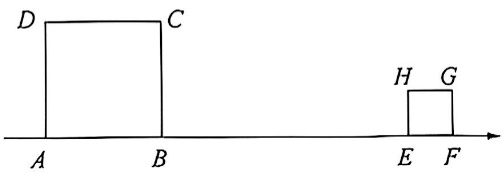
26 正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 在数轴上位置如图①所示，其中 A、B 在数轴上表示的数分别为 a、b，且满足 $(a+20)^2+|b+16|=0$；点 E、F 在正半轴，在数轴上表示的数分别为 m、n，且 m 是 64 的算术平方根，$n=m+2$。

(1) $a=$________，$b=$________，线段 EF 长度为________；

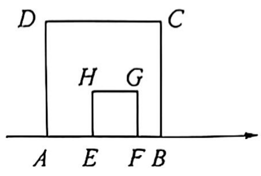
(2) 若正方形 $ABCD$ 以 2 个单位/秒的速度水平向右匀速运动，正方形 $EFGH$ 以 6 个单位/秒的速度水平向左匀速运动。两者同时出发，设运动时间为 t。

① 如图②，当正方形 $EFGH$ 在正方形 $ABCD$ 内部时，求 t 的取值范围；

② 当正方形 $EFGH$ 运动到点 E 在正方形 $ABCD$ 的左侧某位置时，$S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AFD}$，求此时 t 的值。



第 26 题图①



第 26 题图②

第四周　实数的运算　科学记数法

一、选择题

1 如果 $x^2=(-7)^2$，$\sqrt[3]{y^3}=-7$，那么 $x-y$ 的值是(　　)。

(A) 0　(B) -14　(C) 0 或 -14　(D) 0 或 14

2 某市今年生产总值为 3.24 万亿元，3.24 万亿用科学记数法表示为(　　)。

(A) 0.324×10^{13}　(B) 3.24×10^{13}

(C) 3.24×10^{12}　(D) 32.4×10^{12}

3 计算 $|\sqrt{6}-3|+|2-\sqrt{6}|$ 的值为(　　)。

(A) 5　(B) $5-2\sqrt{6}$　(C) 1　(D) $2\sqrt{6}-1$

4 下列说法中：①立方根等于本身的是 -1、0、1；②平方根等于本身的数是 0、1；③两个无理数的和一定是无理数；④实数与数轴上的点是一一对应的；⑤$\frac{\pi}{-3}$是负分数。其中正确的是(　　)。

(A) ②③　(B) ④⑤　(C) ①④　(D) ①⑤

5 定义新运算：当 $a>0$，$b>0$ 时，$a※b=\sqrt{a+2b}$，例如：$6※4=\sqrt{6+2\times4}=\sqrt{14}$。那么 $2\times(4※6)$ 的值是(　　)。

(A) 8　(B) 48　(C) $\sqrt{10}$　(D) $2\sqrt{14}$

6 规定两数 a、b 之间的一种运算，记作 (a, b)；如果 $a^c=b$，那么 $(a, b)=c$。例如：因为 $2^3=8$，所以 $(2, 8)=3$；并且都有 $(3^n, 4^n)=(3, 4)$。证明如下：设 $(3^n, 4^n)=x$，则 $(3^n)^x=4^n$，即 $(3^x)^n=4^n$，所以 $3^x=4$，即 $(3, 4)=x$，所以 $(3^n, 4^n)=(3, 4)$，则 $(3, 4)+(3, 5)=$(　　)。

(A) (3, 10)　(B) (3, 9)　(C) (3, 15)　(D) (3, 20)

二、填空题

7 若每人每天节约 0.1 升水，5 万人一年(以 365 天计)能节约用水________升。(用科学记数法表示)

8 计算：$\sqrt[3]{-8}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+(\pi-1)^0=$________。

9 计算：$\sqrt[3]{-8}-\sqrt{2}+(\sqrt{3})^2+|1-\sqrt{2}|=$________。

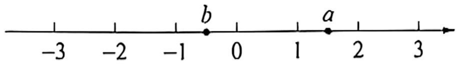
10 计算：$\left|2\sqrt{3}-\sqrt{(-4)^2}\right|+2\sqrt{3}=$________。

11 化简：$|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|=$________。

12 已知 a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，x 的绝对值是 $\sqrt{7}$，则 $x^2+(a+b+cd)x+\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{cd}=$________。

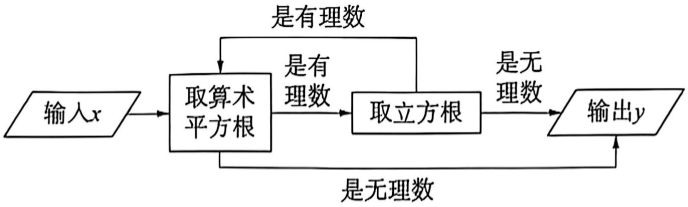
13 在正实数范围内定义一种运算"$\otimes$"：当 $x\geqslant y$ 时，$x\otimes y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}$；当 $x<y$ 时，$x\otimes y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$，则方程 $n\otimes64=5$ 的解是________。

14 表示实数 a、b 的点在数轴上的位置如图所示，化简代数式 $\sqrt{(1-a)^2}+|a-2|-|b+1|+\sqrt[3]{b^3}=$__________。



第 14 题图

15 小明设计了一个如图所示的电脑运算程序：



第 15 题图

(1) 当输入 x 的值是 16 时，则输出的 y 值是__________；

(2) 当实数 x 经过两次取算术平方根后，输出 y 的值为 $\sqrt{2}$，则 x 的值为__________。

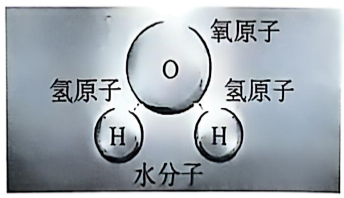
16 已知 m、n 是有理数，且 m、n 满足等式 $2m+n+\sqrt{2}(n-2)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)+21$，则 $\sqrt{m}+n$ 的立方根为__________。

17 计算并把结果用科学记数法表示 $(9\times10^5)\times(2.5\times10^3)=$________。

18 已知 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$ 且 $a+b+c=0$，求 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-3$ 的值为________。

三、解答题

19 水由氢、氧两种元素组成。一个水分子包含两个氢原子和一个氧原子。1 个氢原子的质量约为 1.674×10^{-27} kg，一个氧原子的质量约为 2.657×10^{-26} kg，一个水分子的质量大约是多少(单位：kg)？



第 19 题图

20 (1) 计算：$|1-\sqrt{5}|+\sqrt{(-5)^2}+(\sqrt{10}-\pi)^0$；

(2) 已知 $3(x-1)^2-75=0$，求 x 的值。

21 (1) $(\sqrt[3]{-9})^3+\sqrt[3]{-27}-\sqrt{81}-\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$；

(2) 已知 $2x+1$ 的算术平方根是 3，$2x+y-4$ 的立方根是 -2，求 $x-y$ 的平方根。

22 光年是距离单位，1 光年 $\approx 9.46\times10^{12}$ 千米，人类所观测的宇宙深度已达到 150 亿光年。纳米是表示微小距离的单位，1 米 $=10^9$ 纳米。纳米材料学作为一门新兴学科正成为跨世纪的科技热点之一。请回答下列问题：(用科学记数法表示)

(1) 你知道 1 千米是多少纳米吗？

(2) 你知道 1 光年约是多少纳米吗？

(3) 人类所观测到的宇宙深度约为多少米？

23 我们知道：任意一个有理数与无理数的和为无理数，任意一个不为零的有理数与一个无理数的积为无理数，而零与无理数的积为零。由此可得：如果 $ax+b=0$，其中 a、b 为有理数，x 为无理数，那么 $a=0$ 且 $b=0$。运用上述知识，解决下列问题：

(1) 如果 $(a+2)\sqrt{2}-b+3=0$，其中 a、b 为有理数，那么 $a=$________，$b=$________；

(2) 如果 $2b-a-(a+b-4)\sqrt{3}=5$，其中 a、b 为有理数，求 $3a+2b$ 的平方根。

24 已知 $A=\sqrt[m-n]{m+n+3}$ 是 $m+n+3$ 的算术平方根，$B=\sqrt[m-2n+3]{4m+6n-20}$ 是 $4m+6n-20$ 的立方根，求$\sqrt{A^2+8B}$ 的值。

25 若含根号的式子 $a+b\sqrt{x}$ 可以写成式子$m+n\sqrt{x}$ 的平方(其中 a、b、m、n 都是整数，x 是正整数)，即 $a+b\sqrt{x}=(m+n\sqrt{x})^2$，则称 $a+b\sqrt{x}$ 为完美根式，$m+n\sqrt{x}$ 为 $a+b\sqrt{x}$ 的完美平方根。例如：因为 $19+6\sqrt{2}=(1+3\sqrt{2})^2$，所以 $1+3\sqrt{2}$ 是 $19+6\sqrt{2}$ 的完美平方根。

(1) 已知 $3+2\sqrt{3}$ 是 $a+12\sqrt{3}$ 的完美平方根，求 a 的值；

(2) 若 $m+n\sqrt{5}$ 是 $a+b\sqrt{5}$ 的完美平方根，用含 m、n 的式子分别表示 a、b；

(3) 已知 $17-12\sqrt{2}$ 是完美根式，直接写出它的一个完美平方根。

华东师大版一课一练

单元练习十九

一、选择题

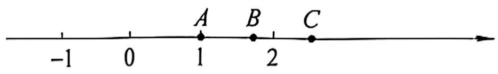
1 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$ 的绝对值是(　　)。

(A) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　(B) $-\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　(C) $-\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

2 已知 1 毫米 $=1$ 百万纳米，那么 0.015 毫米等于(　　)纳米。(用科学记数法表示)

(A) 0.15×10^{3}　　(B) 1.5×10^{4}　　(C) 15×10^{-5}　　(D) 1.5×10^{-6}

3 如图，数轴上 A、B 两点对应的实数分别为 1 和 $\sqrt{3}$，若点 B 为 AC 的中点，则点 C 所对应的实数为(　　)。



第 3 题图

(A) $2\sqrt{3}-1$　　(B) $1+\sqrt{3}$

(C) $2+\sqrt{3}$　　(D) $2\sqrt{2}+1$

4 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$1\frac{2}{5}$的大小关系是(　　)。

(A) $\sqrt{2}<\sqrt{3}<1\frac{2}{5}$　　(B) $1\frac{2}{5}<\sqrt{2}<\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{2}<1\frac{2}{5}<\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{3}<1\frac{2}{5}<\sqrt{2}$

5 关于$\sqrt{19}$，下列说法不正确的是(　　)。

(A) 它是一个无理数

(B) 它可以用数轴上的一个点来表示

(C) 它可以表示面积为 19 的正方形的边长

(D) 若 $n<\sqrt{19}<n+1$(n 为整数)，则 $n=5$

6 下列说法：

① 实数和数轴上的点是一一对应的；

② 无理数是开方开不尽的数；

③ 负数没有立方根；

④ 16 的平方根是±4，用式子表示是 $\sqrt{16}=\pm4$；

⑤ 某数的绝对值、相反数、算术平方根都是它本身，则这个数是 0，

其中错误的是(　　)。

(A) ①②③　　(B) ③④⑤　　(C) ②③④　　(D) ①④⑤

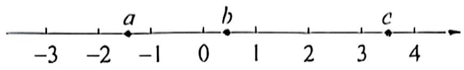
二、填空题

7 $\sqrt{9}+|-2+\sqrt{5}|+(-1)^{2025}=$________。

8 若 a 的平方根等于它本身，x、y 互为倒数，p、q 两数不相等，且数轴上表示 p、q 两个数的点到原点的距离相等，则 $(a+1)^2-(-xy)^{2026}(p+q)$ 的值为________。

9 已知 a、b 是有理数，且满足等式 $2b+\sqrt{3}a=a+5-2\sqrt{3}$，则 $-ab+1$ 的平方根为________。

10 已知 a、b、c 在数轴上的位置如图所示，计算：$|a-2|+|c-b-\sqrt{2}|-|2-\sqrt{2}|=$________。



第 10 题图

11 计算：(1) $\sqrt{49}-\sqrt{0.64}-\sqrt[3]{125}=$________；

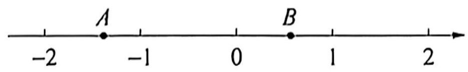
(2) $3\sqrt{2}-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=$________。

12 若 $a^2=1\dfrac{7}{9}$，$b^3=-0.125$，则 $a-b=$________。

13 若 $\sqrt{x-16}+(y+27)^2=0$，则 $\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}=$________。

14 已知数轴上有 A、B 两个点，且这两个点之间的距离为 $5\sqrt{2}$，若点 A 表示的数为 $2\sqrt{2}$，则点 B 表示的数为________。

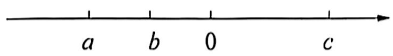
15 如图，一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬行 2 个单位长度到达点 B，点 A 表示 $-\sqrt{2}$。设点 B 所表示的数为 m，则 $(m-1)(m-3)$ 的值是________。



第 15 题图

16 已知 x、y 都是有理数，且 $x^2+2y+\sqrt{2}y=17-4\sqrt{2}$，则 $x+y$ 值为________。

17 已知 a、b、c 在数轴上的位置如图，化简：$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a+b)^2}-|b-c|+\sqrt[3]{b^3}=$________。



第 17 题图

18 若 a、b、c 为实数，且满足 $a+b+c=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$，则 $\sqrt{ab+bc+ca+3}$ 的值为________。

三、解答题

19 根据下表回答下列问题：

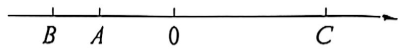
a	…	$-1\,000\,000$	$-0.000\,001$	1	0.001	1000	1 000 000	…
$\sqrt[3]{a}$	…	-100	______	1	______	10	100	…

(1) 填表，利用表中的规律，解决问题：已知 $\sqrt[3]{a}=900$，$\sqrt[3]{729}=9$，则 a 的值为________；

(2) 若 a 为实数，比较 $\sqrt[3]{a}$ 与 a 的大小。

20 (1) 已知 $x-1$ 的算术平方根是 2，$\frac{1}{2}y-1$ 的立方根是 -1，求代数式 $x+y$ 的平方根；

(2) 如图，a、b、c 是数轴上三个点 A、B、C 所对应的实数，试化简：$\sqrt{c^2}-\sqrt{(a-c)^2}+\sqrt[3]{(a-b)^3}-|b-c|$。

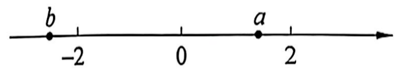


第 20 题图

21 实数 a、b 在数轴上对应点的位置如图所示，$M=\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{(b-2)^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{b^2}$。

(1) 化简 M；

(2) 当 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{3}$ 时，求 M 的值。



第 21 题图

22 计算题。

(1) $(-\sqrt{6})^2-\sqrt{25}+\sqrt{(-3)^2}$；

(2) $\sqrt{2^2}-(\pi-3.14)^0+|-6|+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$；

(3) $-2^4+\sqrt[3]{-27}+\sqrt{49}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$

(4) $|\sqrt{3}-2|+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$。

23 阅读下面的文字,解答问题:

大家知道$\sqrt{2}$是无理数,而无理数是无限不循环小数,因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不可能全部地写出来,于是小明用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分,你同意小明的表示方法吗?

事实上,小明的表示方法是有道理的,因为$\sqrt{2}$的整数部分是1,将这个数减去其整数部分,差就是小数部分。例如:因为$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$,即$2<\sqrt{7}<3$,所以$\sqrt{7}$的整数部分为2,小数部分为$(\sqrt{7}-2)$。

请回答:

(1) $\sqrt{33}$的整数部分是__________,小数部分是__________;

(2) 如果$\sqrt{143}$的小数部分为a,$\sqrt{43}$的整数部分为b,求$a+|2b-\sqrt{143}|$的值;

(3) 已知$10+\sqrt{5}=2x+y$,其中x是整数,且$0<y<1$,求$x-y$的相反数。

24 课堂上老师讲解了比较$\sqrt{11}-\sqrt{10}$和$\sqrt{15}-\sqrt{14}$的方法,观察发现$11-10=15-14=1$,于是比较这两个数的倒数:

$$\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}=\sqrt{11}+\sqrt{10},$$

$$\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{14}}{(\sqrt{15}-\sqrt{14})(\sqrt{15}+\sqrt{14})}=\sqrt{15}+\sqrt{14},$$

因为$\sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{11}+\sqrt{10}$,所以$\dfrac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{14}}>\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$,则有$\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$。

请你设计一种方法比较$\sqrt{8}+\sqrt{3}$与$\sqrt{6}+\sqrt{5}$的大小。

25 数学活动课上，同学们将数轴进行折叠、旋转等几何变换。请阅读下列素材，完成探究任务。

【素材 1】灵动小组绘制了一条“灵动数轴”（如图①），其中点 A 表示的数为 a，点 B 表示的数为 b，点 C 表示的数为 c。已知 a、b、c 满足 $|a+3|+(6+c)^2=-\sqrt{b-7}$。

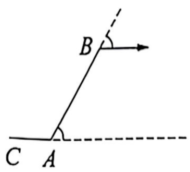
【素材 2】通达小组分别以“灵动数轴”中的点 A 和点 B 为中心旋转一定角度，形成了如图②所示的“数轴阶梯”，其中点 A 和点 B 之间的部分（包括点 A 和点 B）叫做“阶梯坡面”。

【任务 1】在“灵动数轴”中，$a=$________，$b=$________，$c=$________。

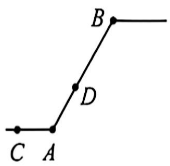
【任务 2】折叠“灵动数轴”，使点 B 与点 C 重合，求此时与点 A 重合的点所表示的数。

【任务 3】点 D 落在“阶梯坡面”上，$BD=7$。现在动点 P、Q 同时开始运动：点 P 从点 C 出发，以 3 个单位长度/秒的速度向点 A 运动，过点 A 后以 2 个单位长度/秒的速度“上坡”至点 B，再以 5 个单位长度/秒的速度“下坡”至终点 A；点 Q 从点 D 出发，以 1 个单位长度/秒的速度“上坡”至终点 B。当一个点到达终点后，另一个点也立即停止运动。当点 P 在“阶梯坡面”上运动时，满足 $2AQ=9PQ$，若此时点 P 的运动时间为 t 秒，请直接写出 t 的值。

第 25 题图①



第 25 题图②



第 25 题备用图

第 20 章　二次根式

第五周　二次根式及其性质　最简二次根式

一、选择题

1 下列各式中运算正确的是(　　)。

(A) $\sqrt{(-2)^2}=-2$　(B) $\sqrt{49}=\pm7$　(C) $\sqrt[3]{(-4)^3}=4$　(D) $\sqrt[3]{27}=3$

2 下列二次根式中，是最简二次根式的是(　　)。

(A) $\sqrt{0.8}$　(B) $\sqrt{12}$　(C) $\sqrt{45}$　(D) $\sqrt{5}$

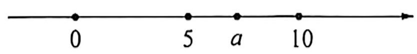
3 若 $|a|=4$，$\sqrt{b^2}=3$，且 $a+b<0$，则 $a-b$ 的值是(　　)。

(A) 1 或 7　(B) -1 或 7　(C) 1 或 -7　(D) -1 或 -7

4 要使二次根式 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是(　　)。

(A) $x>-1$　(B) $x<-1$　(C) $x\geqslant-1$　(D) $x\leqslant-1$

5 实数 a 在数轴上的位置如图所示，则化简 $\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{(a-11)^2}$ 结果为(　　)。



第 5 题图

(A) 7　(B) -7

(C) $2a-15$　(D) 无法确定

6 把 $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$ 化简后，正确的结果是(　　)。

(A) $\sqrt{b-a}$　(B) $\sqrt{a-b}$　(C) $-\sqrt{b-a}$　(D) $-\sqrt{a-b}$

二、填空题

7 若 $\sqrt{(3x-2)^2}=2-3x$，则 x 的取值范围是____________。

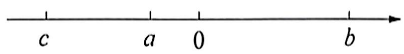
8 若 $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-3}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是____________。

9 若 u、v 满足 $v=\sqrt{\dfrac{2u-v}{4u+3v}}+\sqrt{\dfrac{v-2u}{4u+3v}}+\dfrac{3}{2}$，则 $u^2-uv+v^2=$____________。

10 设 a、b、c 分别是三角形三边的长，则 $\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}=$________。

11 若 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}}{x-2}+2$，则 $x^y=$________。

12 有理数 a、b、c 在数轴上对应点的位置如图所示，化简：$\sqrt{(b-c)^2}-2|c+a|-\sqrt{(a-b)^2}=$________。



第 12 题图

13 若 $\sqrt{3m-4}$ 是最简二次根式，且 m 为整数，则 m 的最小值是________。

14 我们知道，整式、分式、二次根式等都是代数式，代数式是用基本运算符号连接起来的式子，而当被除数是一个二次根式，除数是一个整式时，求得的商就会出现类似 $\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ 这样的形式，

我们称形如这种形式的式子为根分式,例如 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{2x}$ 都是根分式,已知两个根分式 $A=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ 与 $B=\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$,则下列说法:① 根分式 $A=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ 中 x 的取值范围为 $x\geqslant 2$;② 存在实数 x,使得 $B^2-A^2=1$;③ 存在实数 x,使得 A^2+B^2 是一个整数;上述说法中正确的是 ________。

15 如果 $\sqrt[n]{m-n}$ 是二次根式,且值为 5,则m^n 的算术平方根是____________。

16 将 $a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}}$ 化为最简二次根式的结果为________。

17 若 n 为整数,且 $\sqrt{n^2+9n+30}$ 是自然数,则 $n=$____________________。

18 实数 a、b 满足 $\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b+4|-|b-2|$,则 a^2+b^2 的最大值为 ________。

三、解答题

19 阅读下列解题过程:

例:若代数式 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$ 的值是 2,求 a 的取值范围。

解:原式$=|a-1|+|a-3|$。

当 $a<1$ 时,原式$=(1-a)+(3-a)=4-2a=2$,解得 $a=1$(舍去);

当 $1\leqslant a\leqslant 3$ 时,原式$=(a-1)+(3-a)=2=2$,符合条件;

当 $a>3$ 时,原式$=(a-1)+(a-3)=2a-4=2$,解得 $a=3$(舍去)。

所以,a 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant 3$。

上述解题过程主要运用了分类讨论的方法,请你根据上述理解,解答下列问题:

(1) 当 $2\leqslant a\leqslant 3$ 时,化简:$\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-5)^2}=$________;

(2) 若等式 $\sqrt{(3-a)^2}+\sqrt{(a-7)^2}=4$ 成立,则 a 的取值范围是____________;

(3) 若 $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-5)^2}=8$,求 a 的值。

20 已知 $y=\sqrt{(x-4)^2}-x+5$，当 x 分别取 1，2，3，…，2024 时，求所对应 y 值的总和。

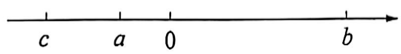
21 小明在解决化简 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 的过程中发现，通过完全平方公式可以将这个代数式化简。

例如：$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$。

(1) 请你仿照小明的方法化简：$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$；

(2) 计算：$2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$。

22 已知实数 a、b、c 在数轴上的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(b-a)^2}$。



第 22 题图

23 已知 x 满足 $|2025-x|+\sqrt{x-2026}=x$，求 $x-2025^2$ 的值。

24 已知 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，a、x、y 为互不相等的实数，求 $\dfrac{x+y}{x-y}$ 的值。

第六周　二次根式的加法和减法

一、选择题

1 已知 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$，则 $x-\frac{1}{x}$ 的值是(　　)。

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $-\sqrt{2}$　　(C) $\pm\sqrt{2}$　　(D) 不能确定

2 下列计算正确的是(　　)。

(A) $\sqrt{(-2)^2}=-2$　　(B) $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{6}$

(C) $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{6}$　　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{4a}=3\sqrt{a}$

3 下列式子中计算正确的是(　　)。

(A) $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$　　(B) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

(C) $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$　　(D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{3}+2$

4 如果 $4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z+9$，那么 xyz 的值是(　　)。

(A) 0　　(B) 2　　(C) 15　　(D) 120　　(E) 150

5 若 $\sqrt{75}-\sqrt{27}=a\sqrt{b}$，则 a^b 的值是(　　)。

(A) 6　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 1

6 若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，又 $\sqrt{a}=m+\frac{a-b}{2}$，$\sqrt{b}=n-\frac{a-b}{2}$，其中 m、n 均为有理数，则有(　　)。

(A) $mn=\frac{1}{2}$　　(B) $m^2+n^2=\frac{1}{2}$

(C) $m+n=\frac{1}{2}$　　(D) $m-n=\frac{1}{2}$

二、填空题

7 计算：$\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{3}=$________。

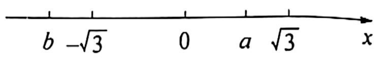
8 计算 $\sqrt{48}-\sqrt{27}$ 的结果为____________。

9 计算：$\sqrt{-a^2}+\sqrt{a+1}-\sqrt{7-2a}+\sqrt{-(a-7)}=$________。

10 计算 $(\pi-3)^0-\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}-4\sqrt{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 的结果为________。

11 已知实数 m、n、p 满足等式 $\sqrt{m-3+n}\cdot\sqrt{3-m-n}=\sqrt{3m+5n-2-p}+\sqrt{m-n-p}$，则 $p=$________。

12 实数 a、b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则 $\sqrt{(a-\sqrt{3})^2}+|b+\sqrt{3}|$ 的值为__________。



第 12 题图

13 计算：$\sqrt{48}-\sqrt{12}=a\sqrt{3}-2\sqrt{b}=c\sqrt{3}$，则 $a=$________，$b+c=$________。

14 若 $a<0$，则 $\frac{1}{b}\sqrt{ab^3}-a\sqrt{\frac{b}{a}}=$________。

15 已知 $a+b=-2$，$ab=1$，则 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=$________。

16 已知 $xy=3$，那么 $x\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值是____________。

17 已知 $3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=16$，$m=4\sqrt{x}-3\sqrt{y}$，则 m 的取值范围是__________________。

18 化简：$\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}=$______________。

三、解答题

19 (1) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}-\sqrt{3}$；

(2) $\left|(\sqrt{5}-3)-\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right|+\left|\sqrt{5}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$。

20 化简：$a\sqrt{ab^3}-b\sqrt{-\frac{2}{b}}+b\sqrt{a^3b}+2\sqrt{a^3b^3}$。

21 先阅读解题过程，再回答后面的问题。

如果 m、n 是正整数，且 $\sqrt{16(2m+n)}$ 和最简二次根式 $\sqrt[m-n+1]{m+7}$ 在二次根式的加减法中可以合并成一项，求 m、n 的值。

解：因为 $\sqrt{16(2m+n)}$ 和 $\sqrt[m-n+1]{m+7}$ 可以合并，

所以 $\begin{cases} m-n+1=2, \\ 16(2m+n)=m+7, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m-n=1, \\ 31m+16n=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\dfrac{23}{47}, \\ n=-\dfrac{24}{47}. \end{cases}$

因为 m、n 是正整数，所以此题无解。

问：(1) 以上解法是否正确？如果不正确，错在哪里？

(2) 给出正确的解答过程。

22 已知 $\sqrt{x-2}+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$，求 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}$ 的值。

23 若 $\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\sqrt{5}$，求 $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+x+1}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2-x+1}}$ 的值。

24 已知 m、n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求 m、n 的值。

25 已知 $a+b=-8$，$ab=12$。

(1) 求 a^2+b^2 的值；

(2) 求 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值。

26 正数 m、n 满足 $m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$，求 $\frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2}$ 的值。

第七周　二次根式的乘法和除法

一、选择题

1 如果$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$，那么(　　)。

(A) $x\geqslant 0$　　(B) $x<1$　　(C) $0\leqslant x<1$　　(D) $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$

2 等式“$m\div\sqrt{8}=\sqrt{2}$”中，m 的值为(　　)。

(A) 2　　(B) 4　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{6}$

3 下列等式成立的是(　　)。

(A) $-4\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$　　(B) $6\sqrt{3}\div 4\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}$

(C) $6\sqrt{6}\div 3\sqrt{2}=6$　　(D) $5\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}=20\sqrt{6}$

4 已知$\sqrt{a^2}=1$，$(-\sqrt{2})^2=b$，则$\sqrt{(a+b)^2}=$(　　)。

(A) 1　　(B) 3　　(C) 1 或 3　　(D) -1 或 -3

5 如果 $ab>0$，$b<0$，那么下列各式：①$\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$；②$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$；③$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}}=1$；④$\sqrt{ab}\div\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-b$。其中正确的个数(　　)。

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

6 下列判断或计算中，正确的有(　　)。

① 若代数式$\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$有意义，则 $x\geqslant 0$；

② $\sqrt{4a^2-4a+1}=2a-1$；

③ $(2-a)\sqrt{\dfrac{1}{a-2}}=-\sqrt{a-2}$；

④ 若 $a\sqrt{a+4}=-\sqrt{a^3+4a^2}$，则 $-4\leqslant a<0$；

⑤ $2\sqrt{12}-2\sqrt{3}+3\sqrt{48}=14\sqrt{3}$。

(A) ①②③④⑤　　(B) ③⑤　　(C) ③④⑤　　(D) ①③④⑤

二、填空题

7 计算：$\sqrt{12x}\cdot\sqrt{\dfrac{y^2}{3x}}\,(y<0)=$________。

8 计算：$4\sqrt{3a^2}\div 2\sqrt{\dfrac{a}{3}}=$________。

9 $\sqrt{50}\cdot\sqrt{a}$ 的值是一个整数，则正整数 a 的最小值是________。

10 计算：$-9\sqrt{\dfrac{3m^2-3n^2}{2a^2}}\div\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{m+n}{a^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2}{m-n}}=$________。

11 已知$-1<a<0$,化简:$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}\cdot\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$得______________。

12 计算:$\sqrt{66\times67\times68\times69+1}=$__________。

13 如果$\sqrt{2}\div\sqrt{\frac{x}{8}}$是整数,那么整数$x$的值是__________。

14 计算:$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$的结果是______________。

15 计算:$(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=$________。

16 已知abc为正数,d为负数,化简$\frac{ab-c^2d^2}{\sqrt{ab}-\sqrt{c^2d^2}}=$______________。

17 在草稿纸上计算:①$\sqrt{1^3}$,②$\sqrt{1^3+2^3}$,③$\sqrt{1^3+2^3+3^3}$,…,观察你计算的结果,用你发现的规律直接写出下面式子的值:$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}=$________,$\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+26^3}=$________。

18 已知$\sqrt{\frac{9-x}{x-6}}=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$,且$x$是偶数,则$(x+2)\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$的值为__________。

三、解答题

19 计算:$\frac{2}{b}\sqrt{ab^2}\times\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right)\div3\sqrt{\frac{b}{a}}$。

20 计算:$\sqrt{48}\div\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{12}\right)+\sqrt{32}$。

21 已知:$x=\sqrt{7}+\sqrt{5}$,$y=\sqrt{7}-\sqrt{5}$。求下列各式的值:

(1) xy;

(2) x^2-xy+y^2。

22 先化简，再求值：$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{\frac{a^{2}+1}{a}-2}$，其中 $a=\frac{2}{3}$。

23 先化简，再求值：$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$。

24 已知 $x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$。

(1) 求 $x^{2}+y^{2}+xy$ 的值；

(2) 若 x 的小数部分为 a，y 的小数部分为 b，求 $(a+b)^{2}+\sqrt{(a-b)^{2}}$ 的值。

25 已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}+5\sqrt{y})$ 且 $x>0$，$y>0$，求 $\frac{x-3\sqrt{xy}+2y}{x+\sqrt{xy}-6y}$ 的值。

第八周　二次根式的混合运算

一、选择题

1 下列各式中计算正确的是(　　)。

(A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　　(B) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5$

(C) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$　　(D) $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

2 下列等式正确的是(　　)。

(A) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}=5\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{9\frac{1}{4}}=3\frac{1}{2}$

(C) $\sqrt{(\pi-3.14)^2}=3.14-\pi$　　(D) $\sqrt{6}\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

3 小强根据学习“数与式”积累的经验，对下面二次根式的运算规律进行探究，并写出了一些相应的等式如下 $\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$；$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$，$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=3\sqrt{\frac{3}{10}}$；$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\sqrt{\frac{4}{17}}$；… 若 $\sqrt{a-\frac{a}{170}}=13\sqrt{\frac{13}{b}}$($a$、$b$ 均为正整数)，则 $(a^2-b)^{2024}$ 的值为(　　)。

(A) 2024　　(B) -1　　(C) 157^{2024}　　(D) 1

4 化简 $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2+(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2$ 的结果为(　　)。

(A) $4x$　　(B) $4y$　　(C) $2x+2y$　　(D) $2x-2y$

5 将 4 个数 a、b、c、d 排成 2 行、2 列，两边各加一条竖直线，记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，则 $\begin{vmatrix} \sqrt{8} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ 的值是(　　)。

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{2}$　　(C) 1　　(D) 0

6 $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{98}+10}=$(　　)。

(A) 9　　(B) $\frac{9}{2}$　　(C) $\frac{9+3\sqrt{11}-\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{7+3\sqrt{11}}{2}$

二、填空题

7 若 $a+6\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，当 a、m、n 均为正整数时，则 $\sqrt{a}$ 的值为____________。

8 计算：$\sqrt{6}\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})=$____________。

9 计算：$\sqrt{3}\div\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{3}{16}}\right)=$____________。

10 如果 $(2-\sqrt{3})^2=a+b\sqrt{3}$，其中 a、b 为有理数，那么 $a+b$ 等于________。

11 计算 $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-(\sqrt{3}+1)^2=$________。

12 已知 $a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$,则 ab^3+a^3b 的值为____________。

13 已知 $m=1+\sqrt{2}$, $n=1-\sqrt{2}$,且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$, 则 a 的值等于________。

14 已知 m 是实数,且 $m+2\sqrt{2}$ 和 $\dfrac{1}{m}-2\sqrt{2}$ 都是整数,那么 m 的值是____________。

15 $\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4}+\sqrt{500}-\pi^0-10(\sqrt{5}-2)^{-1}=$____________。

16 已知 $\sqrt{(x-100)^2}+(\sqrt{96-x})^2=200$, $y=\sqrt{m+23}+\sqrt{m-2}-\sqrt{2-m}$,则 $2y-3x$ 的平方根为________。

17 计算:$\sqrt{1012^2+1012\times2026+1013^2}=$________。

18 利用平方与开平方互为逆运算的关系,可以将某些无理数进行如下操作:当 $a=\sqrt{3}+1$ 时,移项得 $a-1=\sqrt{3}$,两边平方得 $(a-1)^2=(\sqrt{3})^2$,所以 $a^2-2a+1=3$,即得到整系数方程:$a^2-2a-2=0$。仿照上述操作方法,完成下面的问题:

当 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,

(1) 得到的整系数方程为____________;

(2) 计算:$a^3-2a+2024=$________。

三、解答题

19 计算。

(1) $\sqrt{32}-\sqrt{50}-4\sqrt{\dfrac{1}{8}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{1}{5}}\times\sqrt{20}$;

(3) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\dfrac{1}{6}}\right)\div\sqrt{6}-\dfrac{2}{3}\sqrt{18}$;

(4) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$。

20 已知 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。

(1) 求 ab 及 a^2+b^2 的值；

(2) 求不超过 a^5 的最大整数。

21 已知 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$。

(1) 求 x^2+y^2-3xy 的值；

(2) 若 x 的小数部分为 a，y 的整数部分为 b,求 $ax-by$ 的值。

22 定义:若两个二次根式 m、n 满足 $m\cdot n=p$，且 p 是有理数,则称 m 与 n 是关于 p 的和谐二次根式。

(1) 若 m 与$\sqrt{3}$是关于 6 的和谐二次根式,求 m；

(2) 若 $2-\sqrt{2}$ 与 $4+\sqrt{2}m$ 是关于 4 的和谐二次根式,求 m 的值。

23 已知 $x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$，且 $19x^2+123xy+19y^2=1985$。试求正整数 n。

24 设 a、b 为有理数，且 $\dfrac{2\sqrt{3}-b}{3-a\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$，求 a、b 的值。

25 计算：$\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{\sqrt{35}+3\sqrt{5}+3\sqrt{7}+7}$。

单元练习二十

一、选择题

1 若代数式 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是(　　)。

(A) $x \geqslant -1$　　(B) $x \geqslant -1$ 且 $x \neq 3$

(C) $x > -1$　　(D) $x > -1$ 且 $x \neq 3$

2 有二次根式：① $\sqrt{5a}$，② $\sqrt{8a}$，③ $\sqrt{\dfrac{c}{9}}$，④ $\sqrt{a^2+b^2}$，⑤ $\sqrt{a^3}$，其中是最简二次根式的是(　　)。

(A) ②⑤　　(B) ①④　　(C) ③④　　(D) ①⑤

3 下列根式中，是同类二次根式的是(　　)。

(A) $\sqrt{2x^2}$ 和 $\sqrt{3x}$　　(B) $\sqrt{6x^4}$ 和 $\sqrt{6x^3}$

(C) $-5a\sqrt{x}$ 和 $a^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}$　　(D) $2x\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{\dfrac{x^3}{x}}$

4 已知三角形三边为 a、b、c，其中 a、b 两边满足 $\sqrt{a^2-12a+36}+\sqrt{b-8}=0$，那么这个三角形的最大边 c 的取值范围是(　　)。

(A) $c>8$　　(B) $8<c<14$　　(C) $6<c<8$　　(D) $2<c<14$

5 下列式子中计算错误的是(　　)。

(A) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}=7\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{60}\div\sqrt{5}=2\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}=8\sqrt{a}$　　(D) $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$

6 $\sqrt{a^2}+(\sqrt{-a})^2$ 的值等于(　　)。

(A) 0　　(B) $2a$　　(C) $-2a$　　(D) -2

二、填空题

7 $\sqrt{-x+1}$ 是二次根式时，x 的取值范围是________。

8 计算：$\sqrt{12}\div\sqrt{27}\times\sqrt{18}=$________；$(3\sqrt{12}-4\sqrt{27})\div2\sqrt{3}=$________。

9 若 $\sqrt{20n}$ 是整数，则正整数 n 的最小值为________。

10 已知 x、y 为实数，且 $\sqrt{x-3}+(y+2)^2=0$，则 $y^x=$________。

11 若 $\sqrt{m(m-3)}=\sqrt{m}\cdot\sqrt{m-3}$，则 m 的取值范围是________。

12 若 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=5+2\sqrt{6}$，则 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$________。

13 若最简二次根式 $\sqrt{4x-1}$ 与 $\sqrt[y-1]{3y-2}$ 是同类二次根式，则 $xy=$________。

14 若 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，$\dfrac{1}{y}=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，则 $y=$________。

15 若 $a<0$，且 $|a+\sqrt{3a^2}|=(1-\sqrt{3})^2$，则 $a=$________。

16 已知 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y，则 $x\cdot y$ 的值是________。

17 已知 $x\sqrt{\dfrac{2}{x}}+2\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{18x}=10$，则 x 等于________。

18 若 $xy=2$，则 $x\sqrt{\dfrac{y}{x}}+y\sqrt{\dfrac{x}{y}}=$________。

三、简答题

19 计算：$\left(\sqrt{\dfrac{1}{54}}+\sqrt{6}-\sqrt{\dfrac{1}{24}}\right)\div\sqrt{\dfrac{1}{6}}$。

20 计算：$\dfrac{2}{y}\sqrt{xy^5}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\sqrt{x^3y}\right)\div\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}$。$(x>0)$

21 先化简，再求值：$\left(x+2-\dfrac{5}{x-2}\right)\div\dfrac{x-3}{x-2}$，其中 $x=\sqrt{5}-3$。

22 已知 $y=\sqrt{1-8x}+\sqrt{8x-1}+\frac{1}{2}$，求代数式$\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$的值。

23 解关于 x 的不等式：$\sqrt{2}x+2\sqrt{6}>\sqrt{3}x$。

24 化简求值，已知 $a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$b=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，求$\frac{a}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$的值。

25 已知 $x^2-3x+1=0$，求 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$ 的值。

26 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$，善于思考的小明进行了以下探索：设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$（其中 a、b、m、n 均为整数），则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，$a=m^2+2n^2$，$b=2mn$。这样小明就找到了一种把类似 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法。

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

(1) 当 a、b、m、n 均为正整数时，若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，用含 m、n 的式子分别表示 a、b，得 $a=$________，$b=$________；

(2) 利用所探索的结论，换一组正整数 a、b、m、n 填空：____ + ____ $\sqrt{3}=($____ + ____ $\sqrt{3})^2$；

(3) 若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，且 a、m、n 均为正整数，求 a 的值。

第 21 章　一元二次方程

第九周　一元二次方程的解法

一、选择题

1 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是(　　)。

(A) $x^2+\frac{1}{x^2}=0$　　(B) $ax^2+bx+c=0$

(C) $(x-1)(x+2)=0$　　(D) $3x^2-2xy-5y^2=0$

2 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根为 0,则 a 值为(　　)。

(A) 1　　(B) -1　　(C) ±1　　(D) 0

3 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个非零根为 $-b$,则 $a-b$ 的值为(　　)。

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) -2

4 已知一个等腰三角形的两条边长分别是方程 $x^2-7x+10=0$ 的两根,则该等腰三角形的周长是(　　)。

(A) 12　　(B) 9　　(C) 13　　(D) 12 或 9

5 关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x-m=0$,经过配方后的方程是(　　)。

(A) $(x-1)^2=m-1$　　(B) $(x-1)^2=1-m$

(C) $(x-1)^2=m^2+1$　　(D) $(1-x)^2=m+1$

6 若 $a\neq b$, a、b、c 为实数,则关于 x 的方程 $(a-b)x^2+(c-b)x+c-a=0$ 总有一根为(　　)。

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 2

二、填空题

7 关于 x 的方程 $(a^2-4)x^2-(a-2)x+1=0$,当 a________ 时,原方程是一元二次方程,当 a________ 时,原方程是一元一次方程。

8 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 至少有一个根为 0 的条件是________。

9 若一元二次方程 $3x^2=kx+15$ 的一个根为 3,则 $k=$________。

10 若代数式 $3x^2+2$ 和 $1+4x$ 值相等,则 $x=$________。

11 方程 $x^2-5x-6=0$ 的根是________;方程 $x^2-2x=1$ 的根是________。

12 方程 $3x(x+2)=5(x+2)$ 的根是________。

13 方程 $x^2-10x-96=0$ 的根是________。

14 若 $2n(n\neq0)$ 是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根,则 $m-n=$________。

15 若关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2-5(m-1)x+m^2-2m-3=0$ 有一个根是 0,则 m 的值为________。

16 若 b 是方程 $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$ 的根,则 $b^2-4b-\frac{1}{4}=$________。

17 关于实数 a、b 定义运算“※”如下：$a※b=a^2-ab$，例如 $5※3=5^2-5\times3=10$。若 $(x+1)※(x-2)=6$，则 $x=$________。

18 已知 $a<0$，$b>0$，$2a^2+a=\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}=1$，则代数式 $\dfrac{a^3b\sqrt{b}+1}{b\sqrt{b}}$ 的值为________。

三、解答题

19 用适当的方法解下列各一元二次方程：

(1) $(x-1)(x+2)=70$；

(2) $(y+3)^2-2=0$；

(3) $2x^2+4x-7=0$（用配方法）；

(4) $(x+3)^2+2(x+3)-15=0$；

(5) $9(x-1)^2=4(x-2)^2$；

(6) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$。

20 已知 $x^2+3xy-4y^2=0(y\neq0)$，求 $\dfrac{x-y}{x+y}$ 的值。

21　已知关于 x 的方程 $(2a+3)x^2+a^2x+2a=0$ 的一个实数根为 1，求 a 的值及方程另一个实数根。

22　已知方程 $(\sqrt{5}-1)x^2+(\sqrt{5}-5)x-4=0$ 的一个根为 -1，设另一个根为 a，求 a^3-2a^2-4a 的值。

23　已知一个三角形的两边长分别是 3 和 6，第三边的长是方程 $x^2-10x+21=0$ 的根，求这个三角形的周长。

24　已知方程 $(2026x)^2-2027\times2025x-1=0$ 的较大根为 α，方程 $x^2+2024x-2025=0$ 的较小根为 β，求 $\alpha-\beta$ 的值。

第十周　一元二次方程的判别式

一、选择题

1 若关于 x 的一元二次方程 $mx^2-4x-1=0$ 没有实数根，则 m 在下列数据中可以取的值为(　　)。

(A) -5　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

2 不解方程，判断所给方程：① $x^2+3x+7=0$，② $x^2+4=0$，③ $x^2+x-1=0$，④ $x^2+3x+1=0$ 中，有实数根的方程是(　　)。

(A) ①②　　(B) ③④　　(C) ②④　　(D) ①③

3 关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+2-m^2=0$ 的根的情况是(　　)。

(A) 有两个不相等的实根　　(B) 有两个相等的实根

(C) 无实数根　　(D) 不能确定

4 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，若 $a\cdot c<0$，则方程的根的情况是(　　)。

(A) 有两个不相等的实数根　　(B) 有两个相等的实数根

(C) 无实数根　　(D) 无法确定

5 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有两个实数根，m 为正整数，且该方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数 m 的和为(　　)。

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 3

6 关于 x 的方程 $4x^2-2(a-b)x-ab=0$ 的判别式是(　　)。

(A) $4(a+b)^2$　　(B) $(a+b)^2$　　(C) $(a-b)^2$　　(D) $(a-b)^2-4ab$

二、填空题

7 把一元二次方程 $(x+1)(1-x)=2x$ 化成二次项系数大于零的一般式是________，其中二次项系数是________，一次项的系数是________，常数项是________。

8 $x^2-2\sqrt{2}x+$________$=(x-$____$)^2$，$x^2-($____$)x+\frac{1}{4}=(x-$____$)^2$。

9 方程 $x^2-mx-1=0$ 的根的情况是________。

10 已知关于 x 的方程 $4x^2+6x+m=0$ 无实数根，则 m 的最小整数值为________。

11 若方程 $3x^2+bx+1=0$ 没有实数根，则 b 应满足的条件是________。

12 若一元二次方程 $(m+1)x^2-2mx=1$ 的一个根是 3，则 $m=$________。

13 方程 $4x^2=3(4x-3)$ 中，$\Delta=$________，根的情况是____________。

14 若关于 x 的方程 $(a^2+4)x^2-2(a+2)x+1=0$ 恰有两个相等的实根，则 $a=$________。

15 若关于 x 的方程 $2x^2-(2m+1)x+m=0$ 的根的判别式的值是 9，则 $m=$________。

16 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2(3m-1)x+9m-1=0$ 有两个实数根，则实数 m 的取值范围是__________。

17 已知方程 $2x^2-4x-m=0$ 有实数根，而方程 $x^2-2x+m+3=0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是________。

18 在一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 中,若系数 b 和 c 可在 1、2、3、4、5、6 中取值,则其中有实数根的方程的个数是 ________。

三、解答题

19 用适当的方法解下列各一元二次方程:

(1) $x(x-2)=15$;

(2) $3x^2+6x-8=0$(用配方法);

(3) $(x+2)^2-10(x+2)+21=0$;

(4) $3x^2-5x+2=0$;

(5) $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$。

20 已知关于 x 的方程为 $(m-1)x^2+2mx+(m+3)=0$,当 m 取何值时:

(1) 方程有两个实数根;

(2) 方程有两个相等的实数根,并求方程的根。

21 设关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根，求 a、b的值。

22 已知关于 x 的方程 $2x^2+4bx+c=0$ 有两个相等的实数根，且 b、c 互为相反数，求方程的根。

23 若关于 x 的一元二次方程 $5x^2-2\sqrt{6}px+5q=0(p\neq0)$ 有两个相等的实数根。

(1) 求证：关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的实数根；

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2，且 $|x_1|<|x_2|$，求 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的值。

24 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三条边，关于 x 的方程 $\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{b}x+c-\dfrac{1}{2}a=0$ 有两个相等的实数根，方程 $3cx+2b=2a$ 的根为 $x=0$。

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(2) 若 a、b 为方程 $x^2+mx-3m=0$ 的两个根，求 m 的值。

第十一周　一元二次方程的根与系数关系

一、选择题

1 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根是 -7，则另一个根是(　　)。

(A) -2　　(B) 2　　(C) 3　　(D) -3

2 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-3x-2=0$ 的两个实数根，则 $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2$ 的值为(　　)。

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

3 若方程 $x^2+8x-4=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为(　　)。

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) 2　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) -2

4 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$(其中 $a\neq 0$) 的解是 $x_1=4$，$x_2=-6$，且 m 满足 $a(\sqrt{m}+1)^2+b(\sqrt{m}+1)+c=0$，则 $\sqrt{m}-1$ 的值是(　　)。

(A) 2 或 -8　　(B) 3 或 -5　　(C) 2　　(D) -8

5 已知 a、b 是方程 $x^2-x-2025=0$ 的两个实数根，则代数式 $a^3-2025a+b^2$ 的值是(　　)。

(A) 4051　　(B) 4050　　(C) 2025　　(D) 1

6 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根之和是 m，两根之积是 n，则关于 t 的方程 $a(t+1)^2+b(t+1)+c=0$ 的两根之积是(　　)。

(A) $n+m-1$　　(B) $n+m+1$　　(C) $n-m+1$　　(D) $n-m-1$

二、填空题

7 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+6=0$ 的一个根为 3，则方程的另一个根是________。

8 已知 α 和 β 是一元二次方程 $x^2-6x+4=0$ 的两个不相等的实数根，则 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 的值为________________。

9 若 m、n 是方程 $x^2+2x-2024=0$ 的两个实数根，则 m^2+3m+n 的值为________。

10 设一元二次方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个根为 x_1、x_2，则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=$________。

11 已知 a、b 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根，则 4、a、6、b、7 的平均数是________。

12 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不相等的实数根，且其中一个根为另一个根的 2 倍，则称这样的方程为“2 倍根方程”。

(1) 方程 $x^2-6x+8=0$________“2 倍根方程”；(填“是”或“不是”)

(2) 若 $ax^2-(3a+b)x+3b=0(a\neq 0)$ 是“2 倍根方程”，则代数式 $\frac{3a-2b}{a+b}$ 的值为________________。

13 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+(3a-2)x+2(a-2)=0(a>0)$，设方程的两个实数

根为 x_1、x_2,其中 $x_1>x_2$,则 $x_2=$________,若$\sqrt{ax_1-x_2}+\sqrt{ax_2-bx_1}=0$,$b$ 为常数,则 b 的值为________。

14 已知实数 α、β 满足 $3\alpha^2+5\alpha-1=0$,$\beta^2-5\beta-3=0$ 且 $\alpha\beta\neq1$,则$\frac{\alpha}{\beta}$的值为__________。

15 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2(m+2)x+m=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2,若 $x_1+x_2=2m$,则 m 的值为________。

16 若实数 a、b 满足 $(a+99)(a+100)=1$,$(b+100)(b+101)=1$,且 $a-b\neq1$,则 $a+b$ 的值为__________。

17 对于任意实数 a、b,我们定义新运算"$*$":$a*b=a^2+2ab-b^2$,例如 $3*5=3^2+2\times3\times5-5^2=14$。若 m、n 是方程$(x+2)*3=0$ 的两根,则$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ 的值为____________________。

18 设关于 x 的方程 $x^2-2x-m+1=0$ 的两个实数根分别为 α、β,若 $|\alpha|+|\beta|=6$,那么实数 m 的取值是________。

三、解答题

19 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2-4kx+2k^2+3k-3=0$ 有两个实数根。

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 设 x_1、x_2 是该方程的两个实数根,是否存在实数 k,使得等式 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$ 成立?如果存在,请求出 k 的值;如果不存在,请说明理由。

20 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根,求 $\alpha^4+3\beta$ 的值。

21 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m+3)x+m^2+2=0$。

(1) 若方程有实数根，求实数 m 的取值范围；

(2) 若方程的两实数根分别为 x_1、x_2，且满足 $x_1^2+x_2^2=19$，求实数 m 的值。

22 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(8+k)x+8k=0$。

(1) 证明：无论 k 取任何实数，方程总有实数根；

(2) 若 $x_1^2+x_2^2=68$，求 k 的值；

(3) 若等腰三角形的一边长为 5，另两边长恰好是这个方程的两个根，求这个等腰三角形的周长。

23 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+k-1=0$ 有两个实数根为 x_1、$x_2(x_1>x_2)$，且 $x_1\cdot x_2=-1$。

(1) 求 k 的取值；

(2) 求 x_1 与 x_2 的值。

24 设实数 s、t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，并且 $st\neq1$，求 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值。

25 请阅读下列材料：

已知方程 $x^2+x-3=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的 2 倍。

解：设所求方程的根为 y，则 $y=2x$，所以 $x=\frac{y}{2}$，

把 $x=\frac{y}{2}$ 代入已知方程，得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y}{2}-3=0$。

化简，得 $y^2+2y-12=0$，故所求方程为 $y^2+2y-12=0$。

这种利用方程根的代换求新方程的方法，我们称为“换根法”。

(1) 已知方程 $x^2+x-2=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的相反数，则所求方程为____________；

(2) 已知方程 $2x^2-7x+3=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的倒数；

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根分别为 3、-2，求一元二次方程 $ay^2-(2a-b)y+a-b+c=0$ 的两根。

第十二周　一元二次方程的应用

一、选择题

1. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的最小整数解是（　　）。

（A）0　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

2. 若多项式 $4x^2+4x+a$ 在实数范围内能因式分解，则 a 的取值范围是（　　）。

（A）$a=1$　　（B）$a\leqslant 1$　　（C）$a<1$　　（D）$a>1$

3. 下列四个多项式：①x^2+25，②x^2-7，③x^2-x+17，④x^2+4x+1，其中能在实数范围内因式分解的是（　　）。

（A）①②　　（B）②④　　（C）①③　　（D）③④

4. 若三角形两边的长是 3 和 4，第三边的长是方程 $x^2-12x+35=0$ 的根，则该三角形的周长为（　　）。

（A）14　　（B）12　　（C）12 或 14　　（D）12 或 13

5. 用一条长为 40 cm 的绳子围成一个面积为 a cm^2 的长方形，a 值不可能为（　　）。

（A）20　　（B）40　　（C）100　　（D）120

6. 为了美化环境，某市加大对绿化的投资。2010 年用于绿化投资 20 万元，2012 年用于绿化投资 25 万元，求这两年绿化投资的年平均增长率。设这两年绿化投资的年平均增长率为 x，根据题意所列方程为（　　）。

（A）$20x^2=25$　　（B）$20(1+x)=25$

（C）$20(1+x)^2=25$　　（D）$20(1+x)+20(1+x)^2=25$

二、填空题

7. 若二次三项式 px^2+2x-1 在实数范围内能因式分解，则 p 的取值范围是________。

8. 已知 a 是整数，若 x^2-ax-8 在整数范围内能因式分解，则 $a=$________。

9. 若二次三项式 $4x^2-kx+25$ 是完全平方式，则 k 值为________。

10. 若二次三项式 x^2+ax+1 可以分解成 $(x-2)(x+b)$，则 $a-b=$________。

11. 若二次多项式 $k(x^2-2x+1)-2x^2+x$ 能在实数范围内因式分解，则 k 的取值范围是________。

12. 某商品连续两次涨价，售价比原价增长 44%，则平均增长率是________。

13. 已知有两个正方形，周长之和为 36，面积之和为 45，则这两个正方形的边长分别是________。

14. 在实数范围内分解因式：$-3a^2+a+1=$________。

15. 某种品牌的手机经过四、五月份连续两次降价，每部售价由 3200 元降到了 2500 元。设平均每月降价的百分率为 x，根据题意列出的方程是________________________。

16. 若三个连续偶数的平方和为 200，则这三个连续偶数是________。

17. 一个小组内成员互送礼物，共送了 156 件，这个小组共有________人。

18 将一条长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做成一个正方形，则这两个正方形面积之和的最小值是________cm^2。

三、解答题

19 在实数范围内因式分解：

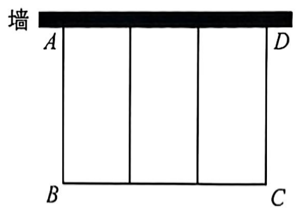
(1) $2x^2-7xy-4y^2$；　　(2) $(x^2-5x)^2+2(x^2-5x)-24$。

20 将一条长为 40 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长做成一个正方形。

(1) 要使这两个正方形的面积之和等于 52 cm^2，那么这段铁丝剪成两段后的长度分别是多少？

(2) 两个正方形的面积之和可能等于 48 cm^2 吗？若能，求出两段铁丝的长度；若不能，请说明理由。

21 如图，要利用一面墙(墙长为 25 米)建花坛，用 100 米的围栏围成总面积为 400 平方米的三个大小相同的矩形花坛，问：花坛的边长 AB、BC 分别是多少米？



第 21 题图

22 在象棋比赛中，每个选手都与其他选手恰好比赛一局，每局赢者记 2 分，输者记 0 分。如果是平局，两个选手各记 1 分，有四个同学统计了全部选手的得分总数，分别是 1979、1980、1984、1985。经核实，有一位同学统计无误。试计算：这次比赛共有多少个选手参加？

23 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件赢利 40 元，为了扩大销售，增加赢利，尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施。经调查发现，每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件。请问：(1)如果商场平均每天要赢利 1200 元，那么每件衬衫应降价多少元？(2)当每件衬衫降价多少元时，商场平均每天赢利最多？

24 已知实数 x、y 满足：$x^2-(2k+1)y-4=0$，$y=x-2$。设等腰三角形三边分别是 a、b、c，其中 $c=4$，且 a、b 满足 $\begin{cases}x=a,\\y=a-2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=b,\\y=b-2,\end{cases}$ 求这个三角形周长。

25 是否存在某个实数 m，使得一元二次方程 $x^2+mx+2=0$ 和 $x^2+2x+m=0$ 有且只有一个共同根？如果存在，求出这个实数 m 及两个方程的公共根；如果不存在，请说明理由。

第十三周　分式方程及其应用

一、选择题

1 下列各式中,是分式方程的是(　　)。

(A) $\frac{1}{2x-3}+\frac{4}{x+9}$　　(B) $\frac{2x+1}{7}=\frac{5x-6}{3}$

(C) $\frac{1}{2}x+5=\frac{2}{3}(x-6)$　　(D) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{2x+1}=1$

2 解方程 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$,若设 $x+\frac{1}{x}=y$,则原方程可化为(　　)。

(A) $6y^2+5y-50=0$　　(B) $6y^2+5y-26=0$

(C) $6y^2+5y-38=0$　　(D) $6y^2+5y-40=0$

3 一列客车已晚点 6 min,如果将速度加快 10 km/h,那么继续行驶 20 km 便可正点运行,如果设客车原来行驶的速度是 x km/h,那么可列出的分式方程为(　　)。

(A) $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+10}=6$　　(B) $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+10}=\frac{1}{10}$

(C) $\frac{20}{x+10}-\frac{20}{x}=6$　　(D) $\frac{20}{x+10}-\frac{20}{x}=\frac{1}{10}$

4 用换元法解方程 $\frac{x}{x-1}-\frac{2x-2}{x}=1$ 时,如果设 $\frac{x}{x-1}=y$,将原方程化为关于 y 的整式方程,那么这个整式方程是(　　)。

(A) $y^2-2y+1=0$　　(B) $y^2-2y-1=0$

(C) $y^2+y-2=0$　　(D) $y^2-y-2=0$

5 若关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-1}=1$ 的解是正数,则 a 的取值范围是(　　)。

(A) $a>-1$　　(B) $a>-1$ 且 $a\neq 0$　　(C) $a<-1$　　(D) $a<-1$ 且 $a\neq -2$

6 对于两个非零的实数 a、b,规定 $a\otimes b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$。若 $1\otimes(x+1)=1$,则 x 的值为(　　)。

(A) $\frac{3}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $-\frac{1}{2}$

二、填空题

7 分式方程 $\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}=0$ 的解是________。

8 若 $x^2+3x+7+\frac{10}{x^2+3x}=0$,设 $x^2+3x=y$,则原方程可化为整式方程:________。

9 若关于 x 的分式方程 $\frac{x-a}{x-1}-\frac{3}{x}=1$ 无解,则 $a=$________。

10 方程组 $\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=3,\\ \frac{6}{x}-\frac{2}{y}=1\end{cases}$ 的解是________。

11 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{k}{x^2-2x}=0$ 有无数多个解，则 $k=$________。

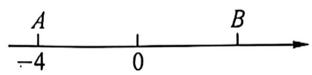
12 对于非零的两个实数 a、b，规定 $a\otimes b=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$。若 $x\otimes(x+1)=2$，则 x 的值为________。

13 当 $m=$________时，方程 $\frac{mx}{m+1}-\frac{2}{x-1}=1$ 的解与方程 $\frac{x+4}{x}=3$ 的解互为相反数。

14 满足方程 $\frac{3x^2-9x}{x^2-3x}=x-3$ 的 x 的值是________。

15 若 $\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+2}=\frac{5x-4}{x^2-3x-10}$，则 $A=$________，$B=$________。

16 如图，点 A、B 在数轴上，它们所对应的数分别是 -4 与 $\frac{2x+2}{3x-5}$，且点 A、B 到原点的距离相等，则 $x=$________。



第 16 题图

17 若 $x^2-3x+1=0$，则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为________。

18 观察分析下列方程：① $x+\frac{2}{x}=3$；② $x+\frac{6}{x}=5$；③ $x+\frac{12}{x}=7$。请利用它们所蕴含的规律，求关于 x 的方程 $x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$（n 为正整数）的根，你的答案是________。

三、解答题

19 解分式方程：$\frac{x^2-2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{x^2}=1$。

20 解分式方程：$\left(1+\frac{9}{x}\right)+3\left(\frac{x+9}{x}\right)^2=2$。

21 解分式方程：$x^2+\frac{1}{x^2}+2x+\frac{2}{x}=6$。

22 当 a 为何值时，关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2}+\frac{ax}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 无解。

23 解分式方程：$\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{3}{2}$。

24 某品牌瓶装饮料每箱价格为 26 元。某商店对该瓶装饮料进行“买一送三”促销活动，若整箱购买，则买 1 箱送 3 瓶，这相当于每瓶比原价便宜了 0.6 元。问：该品牌饮料一箱有多少瓶？

25 已知关于 x 的方程 $\frac{(a+1)(b+1)}{x+2}+\frac{(a-1)(b-1)}{x-2}=\frac{2ab}{x}$ 无解，其中实数 a、b 满足 $a \neq b$，$ab \neq 0$，求 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值。

单元练习二十一

一、选择题

1 给出下列关于 x 的方程:① $ax^2+bx+c=0$, ② $(x-9)^2=1$, ③ $x+3=\frac{1}{x}$, ④ $4x^2+2x-1=0$, 其中是一元二次方程的是(　　)。

(A) ①②　　(B) ②④　　(C) ①③　　(D) ③④

2 用配方法解方程 $x^2+4x+1=0$,配方后的方程是(　　)。

(A) $(x+2)^2=3$　　(B) $(x-2)^2=3$　　(C) $(x-2)^2=5$　　(D) $(x+2)^2=5$

3 以 3 和 4 为根的一元二次方程是(　　)。

(A) $x^2-7x+12=0$　　(B) $x^2+7x+12=0$

(C) $x^2+7x-12=0$　　(D) $x^2-7x-12=0$

4 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为 2,则另一个实数根及 m 的值分别为(　　)。

(A) 4, -2　　(B) -4, -2　　(C) 4, 2　　(D) -4, 2

5 下列二次三项式不能在实数范围内分解的是(　　)。

(A) x^2+8x+2　　(B) $x^2-3x+20$

(C) x^2-x-11　　(D) $-x^2-12x-20$

6 已知三角形的两边长分别是 5 和 6,第三边的长是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根,则该三角形的周长是(　　)。

(A) 13　　(B) 13 或 14　　(C) 12 或 17　　(D) 14

二、填空题

7 将 $(x+3)^2-3x=5x^2$ 化为一元二次方程的一般式为________,它的一次项系数是________。

8 当 $m=$________时,关于 x 的方程 $(m+2)x^{m^2-2}+6x-9=0$ 是一元二次方程。

9 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x-m=0$ 没有实数根,那么 m 的取值范围是________。

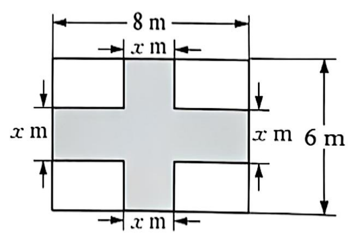
10 已知实数 a、b 满足 $(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)=8$,则 a^2+b^2 的值为________。

11 若关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-\sqrt{2m-3}\,x+\frac{1}{4}=0$ 有两个实数根,则 m 的取值范围为________。

12 在实数范围内分解因式: $3x^2-6xy+2y^2=$________。

13 已知长方形的长是 4 cm,宽是 3 cm,当长与宽同时增加相同长度后,矩形面积增加 8 cm^2,则长与宽同时增加的长度是________。

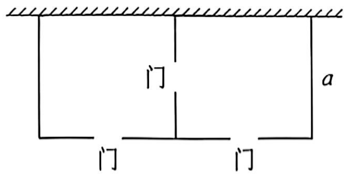
14 小明家有一块长为 8 m,宽为 6 m 的长方形空地,现准备在该空地上建造一个十字花园(图中阴影部分),并使花园面积为该长方形空地面积的一半,小明设计了如图所示的方案,则图中 x 的值为________。



第 14 题图

15 一种药品经过两次降价，药价从原来每盒 60 元降至现在的每盒 48.6 元，则平均每次降价的百分率是________%。

16 某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙（墙足够长），中间用一道墙隔开，并在如图所示的三处各留 1 m 宽的门。已知计划中的材料可建墙体（不包括门）总长为 27 m，则能建成的饲养室总占地面积是 75 m² 时，垂直于现有墙的墙体长 a 是________m。



第 16 题图

17 定义新运算"$\oplus$"如下：当 $a \geqslant b$ 时，$a \oplus b = ab + b$；当 $a < b$ 时，$a \oplus b = ab - a$。若 $(2x-1) \oplus (x+2) = 0$，则 $x =$________。

18 有一人患了流感，经过两轮传染后共有 49 人患了流感，设每轮传染中平均一个人传染了 x 人，则 x 的值为________。

三、解答题

19 解下列方程：

(1) $(3x+2)^2 = (2x-4)^2$；

(2) $(x+4)^2 = 5(x+4)$；

(3) $4x^2 - 2x - 1 = 0$；

(4) $(x-1)^2 - 13(x-1) + 40 = 0$；

(5) $2x^2 + 6 = 7x$；

(6) $(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$。

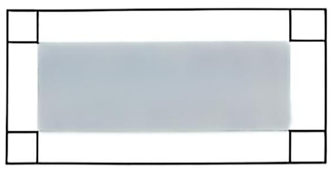
20 在实数范围内分解因式：

(1) $11+4y-4y^2$；

(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$。

21 某场足球比赛，门票16元一张，降价后，观众增加60%，门票收入增加$\frac{1}{5}$，问：门票比原来降价多少元？

22 如图是一块矩形铁片，铁片的长是宽的2倍，在它的四个角上各剪去一个边长是4 cm的小正方形，然后把四边折起来，恰好做成一个无盖的盒子。盒子的体积是1536 cm^3，求这块铁片的长和宽。（铁片的厚度忽略不计）



第22题图

23 为了倡导节能低碳的生活，某公司对集体宿舍用电收费作如下规定：一间宿舍一个月用电量若不超过 a 千瓦时，则一个月的电费为 20 元；若超过 a 千瓦时，则除了交 20 元外，超过部分每千瓦时要交 $\frac{a}{100}$ 元。某宿舍 3 月份用电 80 千瓦时，交电费 35 元；4 月份用电 45 千瓦时，交电费 20 元。

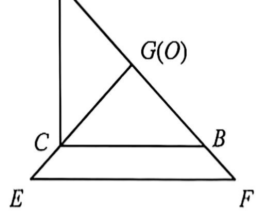
(1) 求 a 的值；

(2) 若该宿舍 5 月份交电费 45 元，则该宿舍当月用电量为多少千瓦时？

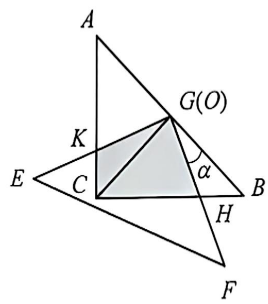
24 如图①，把两个全等的等腰直角三角板 ABC 和 EFG（其直角边的长均为 4）叠放在一起，使三角板 EFG 的直角顶点 G 与三角板 ABC 斜边的中点 O 重合（如图①）。现将三角板 EFG 绕点 O 按顺时针方向旋转（旋转角 α 满足条件：$0°<\alpha<90°$），四边形 $CHGK$ 是旋转过程中两个三角板的重叠部分（如图②）。

(1) 在上述旋转过程中，BH 与 CK 有怎样的数量关系？证明你发现的结论；

(2) 连接 HK，当△GKH 的面积等于△ABC 面积的 $\frac{5}{16}$ 时，求 BH 的长。



第 24 题图①



第 24 题图②

25 根据以下素材，探索完成任务。

<table>
<tr><td colspan="6">如何估算游客人数和门票收入？</td></tr>
<tr><td>素材 1</td><td colspan="5">今年某县接待的游客人数逐月增加，据统计，游玩某景区的游客人数 1 月份为 4 万人，3 月份为 5.76 万人。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">素材 2</td><td rowspan="3">若该景区仅有 A、B 两个景点，售票处出示的三种购票方式如表所示：
据预测，5 月份选择甲、乙、丙三种购票方式的人数分别有 2 万、3 万和 2 万。并且当甲、乙两种门票价格不变时，丙种门票价格每下降 1 元，将有 600 人原计划购买甲种门票的游客和 400 人原计划购买乙种门票的游客改为购买丙种门票。</td><td>购票方式</td><td>甲</td><td>乙</td><td>丙</td></tr>
<tr><td>可游玩景点</td><td>A</td><td>B</td><td>A 和 B</td></tr>
<tr><td>门票价格</td><td>100 元/人</td><td>80 元/人</td><td>160 元/人</td></tr>
<tr><td colspan="6">问题解决</td></tr>
<tr><td>任务 1</td><td>确定增长率</td><td colspan="4">求 2 月和 3 月这两个月中，该景区游客人数平均每月增长百分之几。</td></tr>
<tr><td>任务 2</td><td>预计门票收入</td><td colspan="4">若丙种门票价格下降 10 元，求景区 5 月份的门票总收入。</td></tr>
<tr><td>任务 3</td><td>拟定价格方案</td><td colspan="4">将丙种门票价格下降多少元时，景区 5 月份的门票总收入有 816 万元？</td></tr>
</table>

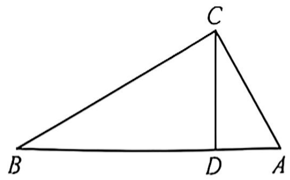
第 22 章　直角三角形

第十四周　直角三角形的性质　直角三角形全等的判定

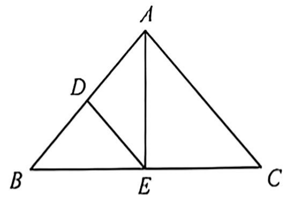
一、选择题

1 如图，$\angle BCA=90°$，$CD\perp AB$，则图中与$\angle A$互余的角有（　　）。

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个



第 1 题图



第 2 题图

2 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=6$，$BC=8$，AE平分$\angle BAC$交BC于点E，点D为AB的中点，连接DE，则$\triangle BDE$的周长是（　　）。

（A）$7+\sqrt{5}$

（B）10

（C）$4+2\sqrt{5}$

（D）12

3 在直角三角形ABC中，若$\angle C=90°$，D是BC边上的一点，且$AD=2CD$，则$\angle ADB$的度数是（　　）。

（A）$100°$

（B）$110°$

（C）$120°$

（D）$150°$

4 $\triangle ABC$中各角的度数之比如下，能够说明$\triangle ABC$是直角三角形的是（　　）。

（A）$1:2:3$

（B）$2:3:4$

（C）$3:4:5$

（D）$3:3:5$

5 下列命题中错误的是（　　）。

（A）有两个角互余的三角形一定是直角三角形

（B）在三角形中，若一边等于另一边一半，则较小边的对角为 $30°$

（C）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

（D）在$\triangle ABC$中，若$\angle A:\angle B:\angle C=1:4:5$，则这个三角形为直角三角形

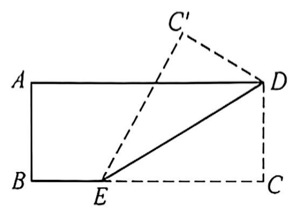
6 将一张长方形纸片$ABCD$如图所示折叠，使顶点C落在C'点。若$AB=2$，$\angle DEC'=30°$，则折痕DE的长为（　　）。

（A）2

（B）$2\sqrt{3}$

（C）4

（D）1

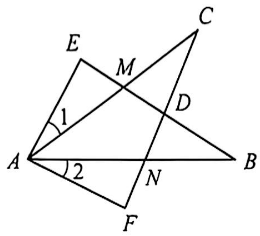


第 6 题图

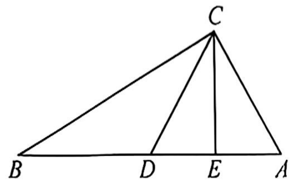
二、填空题

7 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle A=36^\circ$，则 $\angle BCD=$________度。

8 如图，已知 $\triangle ABE\cong\triangle ACF$，$\angle E=\angle F=90^\circ$，$\angle CMD=70^\circ$，则 $\angle 2=$________度。



第 8 题图



第 9 题图

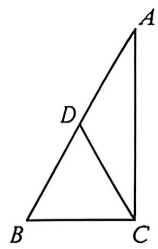
9 如图，CD 为 $\triangle ABC$ 的中线，$\angle ACB=90^\circ$，$CE\perp AB$ 于点 E，$AE=ED$，则 $\angle ABC$ 的度数为________。

10 已知三角形的三个内角的度数之比为 $1:2:3$，且最短边是 3 厘米，则最长边上的中线等于________。

11 若直角三角形斜边上的中线长为 4，斜边上的高为 3，则这个三角形的面积为________。

12 若等腰直角三角形斜边上的中线为 10 cm，则此等腰直角三角形的面积为________cm^2。

13 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，CD 为 AB 边上的中线，如果 $CD=5$ cm，那么 $\triangle DBC$ 的周长是________cm。

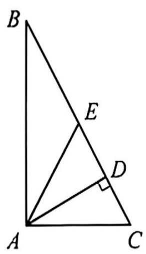


第 13 题图

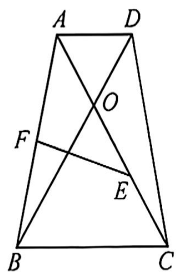
14 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，CE 是斜边 AB 上的中线，CD 是 AB 上的高，如果 $AB=10$ cm，$DE=2.5$ cm，那么 $\angle DEC=$________。

15 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，AD、AE 分别是 BC 边上的高、中线，$DE=2$，则 $BC=$________。

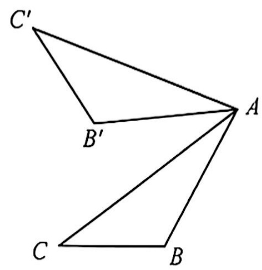
16 若等腰三角形一腰上的高等于该三角形一条边长度的一半，则其顶角为________。



第 15 题图



第 17 题图



第 18 题图

17 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=CD=8$ cm，AC、BD 相交于 O 点，且 $\angle AOD=60^\circ$，设 E、F 分别为 CO、AB 的中点，则 $EF=$________cm。

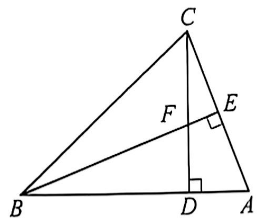
18 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=35^\circ$，$\angle ABC=120^\circ$，把 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转后，B 与 B' 对应，C 与 C' 对应，若 $C'B'$ 与 AC 垂直，则旋转角的度数为________。

三、简答题

19 如图，在$\triangle ABC$中，$CD\perp AB$，垂足为D，且$CD=BD$，BE平分$\angle ABC$，且$BE\perp AC$，垂足为E，BE交CD于点F。

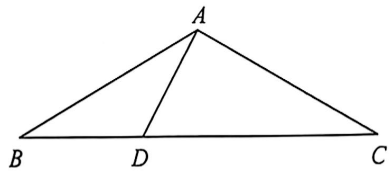
（1）求证：$AE=CE$；

（2）求证：$BF=2CE$。



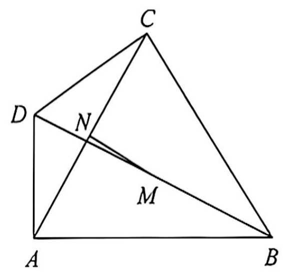
第 19 题图

20 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在BC上，$\angle DAC=90°$，$AD=\frac{1}{2}CD$。求$\angle BAC$的度数。



第 20 题图

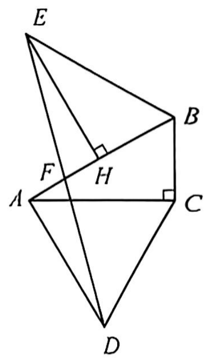
21 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，点$M$、$N$分别是$BD$、$AC$的中点，求证：$MN$垂直平分$AC$。



第 21 题图

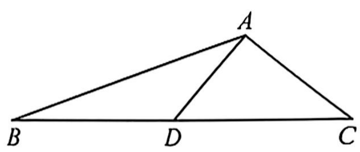
华东师大版一课一练

22 如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$, $AB=2BC$,以 AC 为边作等边$\triangle ACD$,并作斜边 AB 的垂直平分线 EH,且 $EB=AB$,连接 DE 交 AB 于点 F,求证:$EF=DF$。



第 22 题图

23 如图,在$\triangle ABC$ 中,$BD=DC$,若 $AD\perp AC$, $\angle BAD=30°$。求证:$AC=\dfrac{1}{2}AB$。

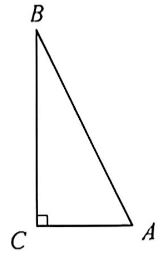


第 23 题图

24 如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$。

(1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D;(要求在原图上用尺规作图,保留作图痕迹,不必写出作图过程和理由)

(2) 设 E 是 AD 的中点,求证:$BD=2CE$。



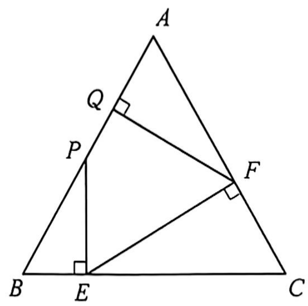
第 24 题图

25 如图,在等边三角形 ABC 中,$AB=4$,点 P 是 AB 上的一个动点(点 P 可以与点 A 重合,但不与点 B 重合),过点 P 作 $PE\perp BC$,垂足为点 E,过 E 作 $EF\perp AC$,垂足为点 F,过 F 作 $FQ\perp AB$,垂足为点 Q,设 $BP=x$, $AQ=y$。

(1) 用 x 的代数式表示 y,并写出 x 的取值范围;

(2) 当 BP 的长等于多少时,点 P 与点 Q 重合;

(3) 用 x 的代数式表示 PQ 的长(不必写出解题过程)。



第 25 题图

第十五周　角平分线的性质定理

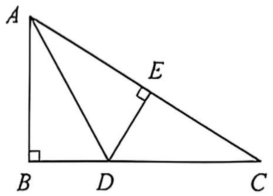
一、选择题

1 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，AD 平分 $\angle BAC$，交 BC 于点 D，$DE\perp AC$，垂足为点 E，若 $BD=3$，则 DE 的长为（　　）。

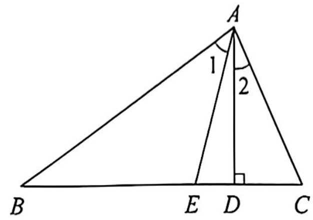
（A）3　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）2　　（D）6

2 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，AE 平分 $\angle BAC$，若 $\angle 1=40^\circ$，$\angle 2=25^\circ$，则 $\angle B$ 的度数为（　　）。

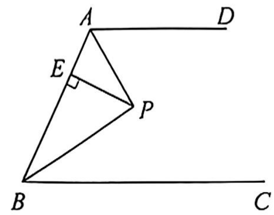
（A）25°　　（B）35°　　（C）45°　　（D）55°



第 1 题图



第 2 题图



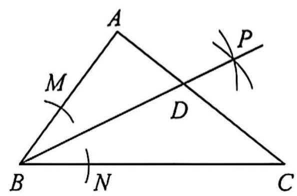
第 3 题图

3 如图，$AD\parallel BC$，$\angle ABC$ 的平分线 BP 与 $\angle BAD$ 的平分线 AP 相交于点 P，作 $PE\perp AB$，垂足为 E。若 $PE=3$，则两平行线 AD 与 BC 间的距离为（　　）。

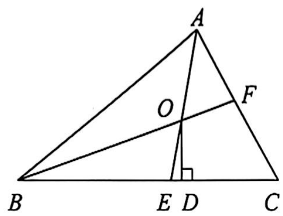
（A）3　　（B）5　　（C）6　　（D）不能确定

4 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$BC=10$，以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，交 BA、BC 于 M、N 两点，分别以 M、N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，画射线 BP 交 AC 于点 D，若 $\triangle ABD$ 的面积为 9，则 $\triangle BDC$ 的面积为（　　）。

（A）9　　（B）12　　（C）15　　（D）18



第 4 题图



第 5 题图

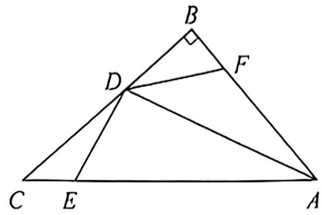
5 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线 AE、BF 相交于点 O，AE 交 BC 于点 E，BF 交 AC 于点 F，过点 O 作 $OD\perp BC$ 于点 D，下列三个结论：①$\angle AOB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$；②若 $OD=a$，$AB+BC+CA=2b$，则 $S_{\triangle ABC}=ab$；③当 $\angle C=60^\circ$ 时，$AF+BE=AB$。其中正确的是（　　）。

（A）①②　　（B）②③　　（C）①③　　（D）①②③

6 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AC=8$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，E、F 分别在 AC、AB 边上。$AF=4$，$AE=6$，连接 DF、DE。若 $DE=DF$，则 AB 的长是（　　）。

（A）6.5　　　（B）7

（C）6　　　（D）5

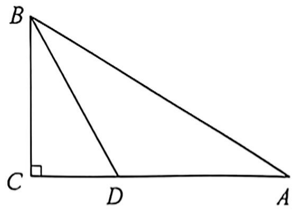


第 6 题图

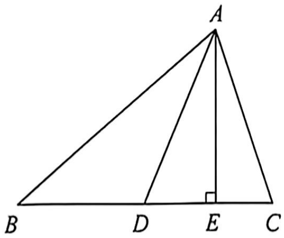
二、填空题

7 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$DC=\frac{1}{2}AD$，BD 平分 $\angle ABC$，则点 D 到 AB 的距离为________。

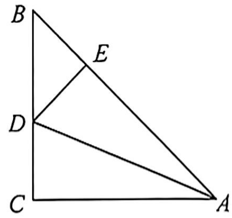
8 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD、AE 分别是边 CB 上的中线和高，$AE=3\ \text{cm}$，$S_{\triangle ABD}=6\ \text{cm}^2$，则 CD 的长是________cm。



第 7 题图



第 8 题图

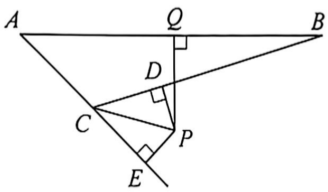


第 9 题图

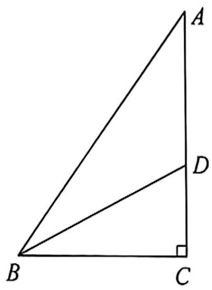
9 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，AD 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AB$，且 $AB=5\ \text{cm}$，则 $\triangle DEB$ 周长为________cm。

10 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB 边的垂直平分线 PQ 与 $\triangle ABC$ 的外角平分线交于点 P，过点 P 作 $PD\perp BC$ 于点 D，$PE\perp AC$ 于点 E。若 $BC=6$，$AC=4$，则 CE 的长度是________。

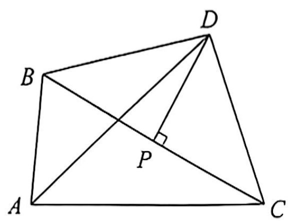
11 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 D，且 $CD:AD=2:3$，$AC=10\ \text{cm}$，则点 D 到 AB 的距离等于________。



第 10 题图



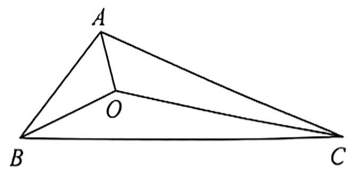
第 11 题图



第 12 题图

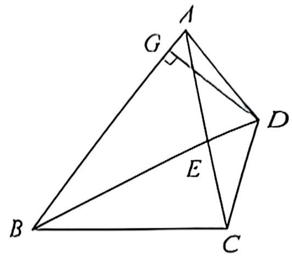
12 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BC 的垂直平分线 DP 与 $\angle BAC$ 的平分线相交于点 D，垂足为点 P。若 $\angle BAC=84^\circ$，则 $\angle BDC$ 的度数为________。

13 如图，$\triangle ABC$ 的角平分线相交于点 O，已知 $AB=4$，$AC=8$，$BC=10$，则 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}:S_{\triangle BCO}=$________。



第 13 题图

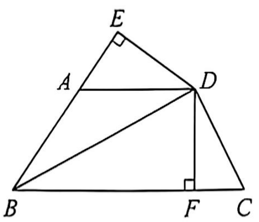
14 如图，在$\triangle ABC$中，BE平分$\angle ABC$，且$\angle BEC=\angle BCE$，若点D为BE延长线上的一点，并且$BD=BA$，过D作$DG\perp AB$，垂足为G。下列结论：①$\triangle ABE\cong\triangle DBC$；②$AD=CE$；③$\angle BAD=\angle BCA$；④$BC+2AG=AB$，其中正确的是________。（填序号）



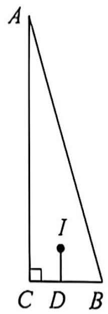
第 14 题图

15 如图，已知BD平分$\angle ABC$，$DE\perp BA$交BA的延长线于点E，$DF\perp BC$于点F，$\angle BAD+\angle C=180°$，$BC=12\,\text{cm}$，$AB=6\,\text{cm}$，则AE的长度为________cm。

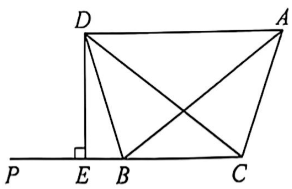
16 如图，$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AB=25$，$AC=24$，$CB=7$，I是三条角平分线的交点，$ID\perp BC$于点D，则ID的长是________。



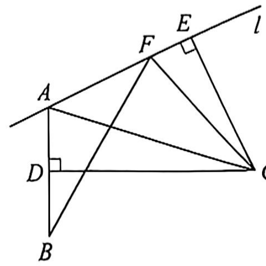
第 15 题图



第 16 题图



第 17 题图



第 18 题图

17 如图，BD是$\triangle ABC$的外角$\angle ABP$的平分线，$DA=DC$，$DE\perp BP$于点E。若$AB=5$，$BC=3$，则BE的长为________。

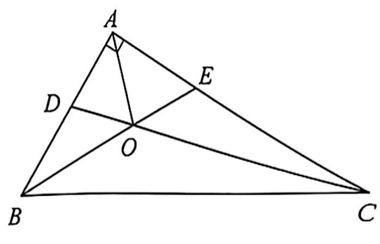
18 如图，已知CD是线段AB的垂直平分线，直线l经过点A，过C点作$CE\perp l$，垂足为点E，点F是线段AE上一点，连接BF、CF，$\angle BFE=2\angle BAC$，CF平分$\angle BFE$，则线段BF、EF、AF之间的等量关系是________。

三、解答题

19 如图，$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，BE平分$\angle ABC$交AC于点E，CD平分$\angle ACB$交AB于点D，BE与CD交于点O，连接AO。

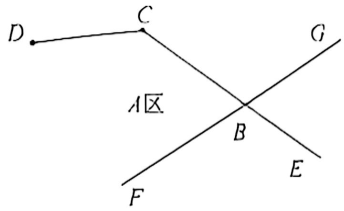
(1) 求$\angle BOD$的度数；

(2) 求证：AO平分$\angle BAC$。



第 19 题图

20 尺规作图：如图所示，在一次军事演习中，红方侦察员发现：蓝方指挥部点 P 在 A 区内，且到铁路 FG 和公路 CE 的距离相等，到两通讯站 C 和 D 的距离也相等。如果你是红方的指挥员，请你在图中标出蓝方指挥部点 P 的位置（保留作图痕迹，不必写作法）。

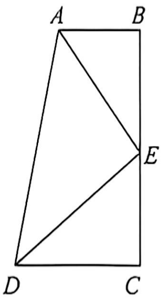


第 20 题图

21 如图，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$E$ 是 BC 的中点，DE 平分 $\angle ADC$。

(1) 求证：AE 是 $\angle DAB$ 的平分线；

(2) 探究：线段 AD、AB、CD 之间有何数量关系？请证明你的结论。

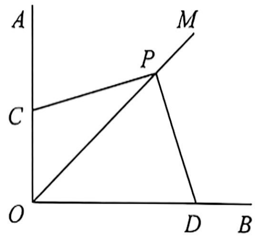


第 21 题图

22 如图，$\angle AOB=90^\circ$，OM 平分 $\angle AOB$，直角三角板的直角顶点 P 在射线 OM 上移动，两直角边分别与 OA、OB 相交于点 C、D。

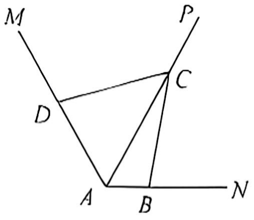
(1) 求证：$PC=PD$；

(2) 若 $OP=2$，求四边形 $PCOD$ 的面积。

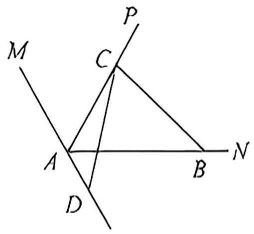


第 22 题图

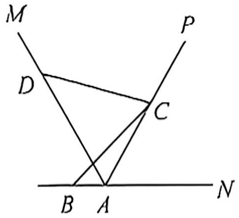
23 我们知道在解与角平分线有关的问题时，通常过角平分线上的一点作角两边的垂线，构造全等三角形，请完成下列问题。



第 23 题图①



第 23 题图②



第 23 题图③

【初步探究】

(1) 如图①，$\angle MAN = 120°$，AP 平分 $\angle MAN$，点 C 是射线 AP 上一点，$\angle BCD = 60°$，且与 AM、AN 分别交于点 D、B，求证：$CD = CB$；

【类比探究】(2) 如图②，其他条件不变，将图①的 $\angle BCD$ 绕点 C 逆时针旋转使点 D 落在 AM 的反向延长线上。请探究线段 AB、AC 和 AD 之间的数量关系，写出结论并证明；

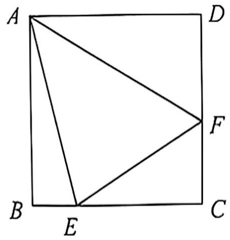
【拓展应用】(3) 如图③，其他条件不变，将图①的 $\angle BCD$ 绕点 C 顺时针旋转使点 B 落在 AN 的反向延长线上。请直接写出线段 AB、AC 和 AD 之间的数量关系。(不用证明)

24 (1) 如图①,四边形 $ABCD$ 是正四边形,$\angle EAF$ 在$\angle BAD$ 的内部绕点 A 转动,若 AE 平分$\angle BEF$。

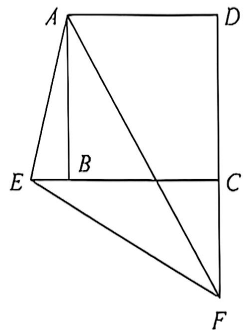
① 求证:AF 平分$\angle DFE$;

② 直接写出线段 BE、EF、DF 之间的数量关系:________________;

(2) 如图②,四边形 $ABCD$ 是正四边形,$\angle EAF=45°$,$\angle EAF$ 绕点 A 旋转,$\angle EAF$ 的边与 CB 的延长线交于点 E,与 DC 的延长线交于点 F。求证:$BE+EF=DF$。



第 24 题图①



第 24 题图②

华东师大版一课一练

25 教材回顾

证明:三角形的三条角平分线交于一点。

已知:如图①,$\triangle ABC$ 的角平分线 AD、BE 相交于点 P。

求证:点 P 在$\angle C$ 的平分线上。

证明:过点 P 作 $PF \perp AB$,$PM \perp BC$,$PN \perp AC$,垂足分别为 F、M、N。

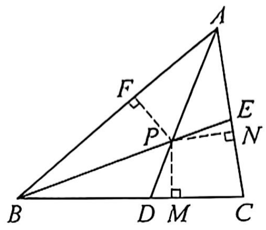
因为 AD 平分$\angle BAC$,$PF \perp AB$,$PN \perp AC$,

所以__________。

同理__________。

所以__________。

所以点 P 在$\angle C$ 的平分线上。



第 25 题图①

(1) 补全教材中例题的证明过程。

拓展研究

如果一个四边形的四条角平分线交于一点,那么这个四边形会具有怎样的性质?

(2) 如图②,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD$、$\angle ABC$、$\angle ADC$ 的平分线相交于点 O。

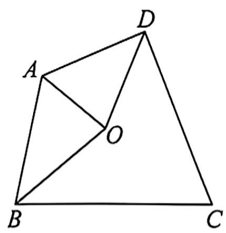
求证:(Ⅰ) 点 O 在$\angle BCD$ 的平分线上;

(Ⅱ) $AB+CD=AD+BC$。

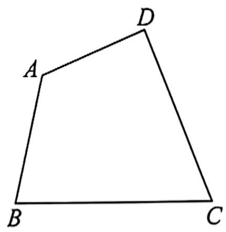
逆向思考

满足什么条件的四边形的四条角平分线交于一点?

(3) 如图③,在四边形 $ABCD$ 中,如果 $AB+CD=AD+BC$,那么它的四条角平分线交于一点吗?说明理由。



第 25 题图②



第 25 题图③

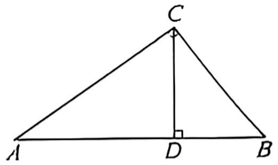
第十六周　勾股定理

一、选择题

1 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，$CD\perp AB$ 于 D，则 CD 的长是（　　）。

（A）5　　（B）7

（C）$\frac{12}{5}$　　（D）$\frac{24}{5}$

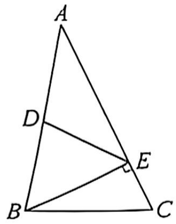


第 1 题图

2 如图，$\triangle ABC$ 中，D 为 AB 中点，E 在 AC 上，且 $BE\perp AC$。若 $DE=5$，$AE=8$，$EC=\sqrt{7}$，则 BC 的长度是（　　）。

（A）$\sqrt{29}$　　（B）8

（C）$\sqrt{43}$　　（D）$\sqrt{71}$



第 2 题图

3 已知直角三角形纸片的两条直角边长分别为 m 和 n（$m<n$），过锐角顶点把该纸片剪成两个三角形，若这两个三角形都为等腰三角形，则（　　）。

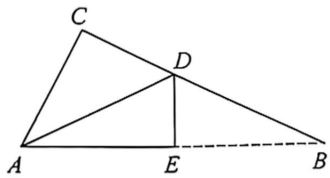
（A）$n^2+2mn+m^2=0$　　（B）$m^2+2mn-n^2=0$

（C）$m^2-2mn-n^2=0$　　（D）$m^2-2mn+n^2=0$

4 如图，是一张直角三角形纸片的示意图，其中 $\angle C=90^\circ$，$AC=4$，$BC=8$，沿着 DE 折叠该纸片，使点 B 与点 A 重合，则 BD 的长为（　　）。

（A）4　　（B）$\frac{25}{4}$

（C）6　　（D）5



第 4 题图

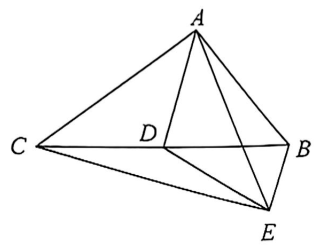
5 若一直角三角形的两边长分别为 12 和 5，则第三边长为（　　）。

（A）13　　（B）13 或$\sqrt{119}$　　（C）13 或 15　　（D）15

6 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，点 D 是BC 的中点，将$\triangle ACD$ 沿 AD 翻折得到$\triangle AED$，连接 BE，则线段 BE 的长为（　　）。

（A）$\frac{5}{3}$　　（B）$\frac{5}{4}$

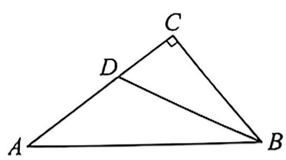
（C）$\frac{7}{5}$　　（D）2



第 6 题图

二、填空题

7 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=4$，$AB=5$，$\angle C=90^\circ$，BD 平分$\angle ABC$ 交 AC 于点 D，则 DC 的长是__________。



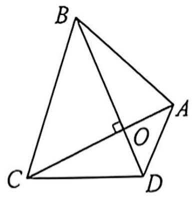
第 7 题图

8 已知在$\triangle ABC$ 中，$AB=17$，$AC=10$，BC 边上的高线$AD=8$，则 BC 边的长为__________。

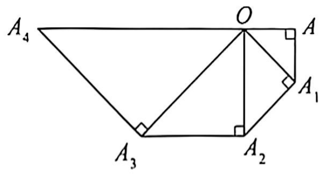
9 对角线互相垂直的四边形叫做“垂美”四边形，现有如图所示的“垂美”四边形 $ABCD$，对角线 AC、BD 交于点 O。若 $AD=2$，$BC=4$，则 $AB^2+CD^2=$________。

10 如图，在等腰直角三角形 OAA_1 中，$\angle OAA_1=90^\circ$，$OA=1$，以 OA_1 为直角边作等腰直角三角形 OA_1A_2，以 OA_2 为直角边作等腰直角三角形 OA_2A_3，……，则 OA_4 的长度为________。

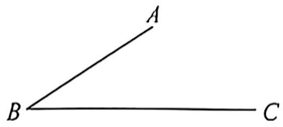
11 如图，$\angle ABC=30^\circ$，$AB=6$，动点 P 从点 B 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿射线 BC 运动，设点 P 的运动时间为 t 秒，当 $\triangle ABP$ 是以 AB 为底的等腰三角形时，t 的值为________秒。



第 9 题图



第 10 题图

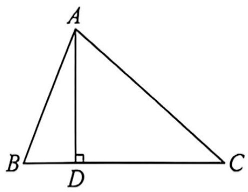


第 11 题图

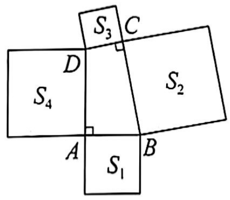
12 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，若 $BD=1$，$AC=4$，且 $\angle DAC+2\angle BAD=90^\circ$，则 AD 的长为________。

13 定义：我们把三角形某边上高的长度与这边中点到高的距离的比值称为三角形某边的“中偏度值”。在 $\triangle ABC$ 中，$AC=13$，$AB=15$，BC 边上的高 $AD=12$，$\triangle ABC$ 中 BC 边的“中偏度值”为________。

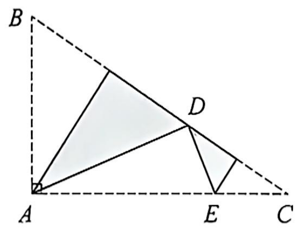
14 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，分别以四边形的四条边为边向外作四个正方形，面积分别记为 S_1、S_2、S_3、S_4。若 $S_1+S_4=35$，$S_2=26$，则 $S_3=$________。



第 12 题图



第 14 题图



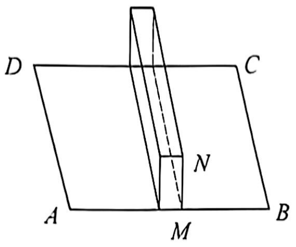
第 15 题图

15 如图，三角形纸片 ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=2$，$AC=3$。沿过点 A 的直线将纸片折叠，使点 B 落在边 BC 上的点 D 处；再折叠纸片，使点 C 与点 D 重合，若折痕与 AC 的交点为 E，则 AE 的长是________。

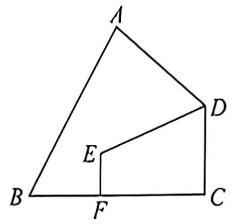
16 如图，正方形地砖 $ABCD$，边长为 30 cm，中间竖有一根宽为 4 cm 的木条，木条高 MN 为 5 cm。一只蚂蚁从点 A 爬到点 C，它必须翻过中间的木条，则它至少要走________cm。

17 如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$AB=BC$，将边 DA 绕点 D 逆时针旋转 60° 得到线段 DE，过点 E 作 $EF\perp BC$，垂足为点 F，若 $EF=2$，$BF=3$，则线段 $CD=$________。

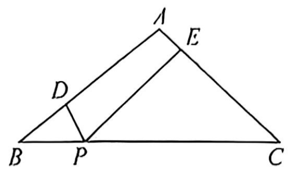
18 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=8$，点 P 是 BC 边上的动点，过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，$PE\perp AC$ 于点 E，则 $PD+PE$ 的长是________。



第 16 题图



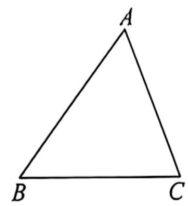
第 17 题图



第 18 题图

三、解答题

19 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=15$，$BC=14$，$AC=13$，求$\triangle ABC$的面积。

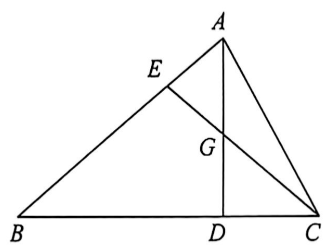


第 19 题图

20 如图，在锐角$\triangle ABC$中，点E是AB边上一点，$BE=CE$，$AD\perp BC$于点D，AD与EC交于点G。

(1) 求证：$\triangle AEG$是等腰三角形；

(2) 若$BE=10$，$CD=3$，G为CE中点，求AG的长。

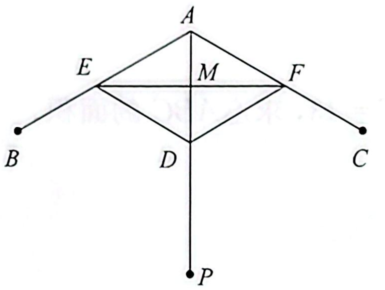


第 20 题图

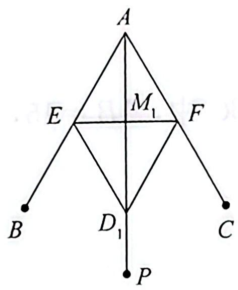
21 我国的纸伞工艺十分巧妙。如图，伞柄 AP 始终与伞骨 AB、AC 在同一平面内，且 $AE=AF=DE=DF$。

(1) 求证：$AP\perp EF$；

(2) 由(1)可得伞圈 D 在伞圈 AP 上滑动。如图①，伞打开时 $EF=\sqrt{3}AD$，$AE=20\,\text{cm}$；当伞缩拢到图②状态时，$AD_1=\sqrt{3}EF$，伞圈 D 下滑的距离 DD_1 长是多少？



第 21 题图①

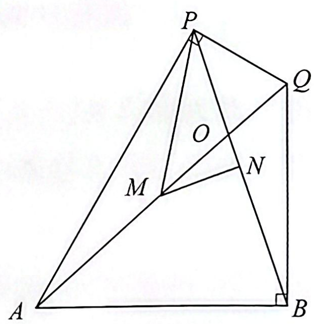


第 21 题图②

22 如图，在线段 AB 的同侧作△PAB 和△QAB，PB 和 QA 相交于点 O，M、N 分别是边 AQ、BP 的中点，连接 PQ、PM、MN，$\angle APQ=\angle ABQ=90^\circ$。

(1) 判断△PMN 的形状，并说明理由；

(2) 当 $AQ=26$，$BP=24$ 时，求 MN 的长。



第 22 题图

23 若直角三角形的三边的长都是正整数，则三边的长为“勾股数”。构造勾股数，就是要寻找 3 个正整数，使它们满足“其中两个数的平方和(或平方差)等于第三个数的平方”，即满足以下关系：

$$(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2; \tag{①}$$

$$或(\quad)^2-(\quad)^2=(\quad)^2; \tag{②}$$

要满足以上①、②的关系，可以从乘法公式入手，我们知道：

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy; \tag{③}$$

如果等式③的右边也能写成“$(\quad)^2$”的形式，那么它就符合②的关系。

因此，只要设 $x=m^2$，$y=1$，③式就可化成：$(m^2+1)^2-(m^2-1)^2=(2m)^2$。于是，当 m 为大于 1 的正整数时，“m^2+1，m^2-1 和 $2m$”就是勾股数。根据勾股数的这种关系式，就可以找出勾股数。

(1) 当 $m=4$ 时，该组勾股数是__________；

(2) 若一组勾股数中最大的数与最小的数的和为 16，求 m 的值；

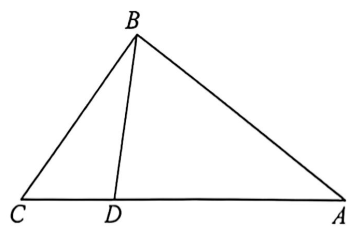
(3) 若一组勾股数中最大数是 $a^2+6a+10$(a 是任意正整数)，则另外两个数分别为__________，__________。(分别用含 a 的代数式表示)

24 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$BC=3$，点 D 为 AC 边上的动点，点 D 从点 C 出发，沿边 CA 往 A 运动，当运动到点 A 时停止，若设点 D 运动的时间为 t 秒，点 D 运动的速度为每秒 1 个单位长度。

(1) 当 $t=2$ 时，分别求 CD 和 AD 的长；

(2) 当 t 为何值时，△CBD 是直角三角形？

(3) 若△CBD 是等腰三角形，请直接写出 t 的值。



第 24 题图

25 如图①，Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，点 D 在 BC 边上，将△ABD 沿直线 AD 翻折，点 B 的对应点 B' 恰好落在 AC 的延长线上，连接 $B'D$。

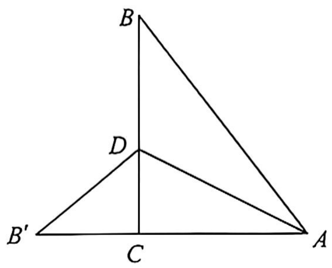
(1) 求 CD 的长。

(2) 如图②，点 E 在线段 AD 上，连接 BE、EB'、BB'，当△EBB' 是等腰直角三角形时：

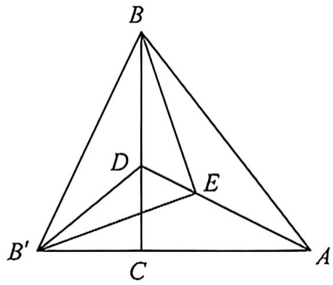
① 求证：点 E 在∠ACB 的平分线上；

② 求点 E 到 AC 的距离。

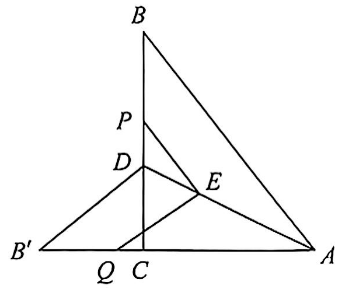
(3) 如图③，在(2)的条件下，点 P 从点 B 出发以每秒 2 个单位长度的速度沿 BC 往点 C 运动，连 PE，过点 E 作 EP 的垂线，交直线 AC 于点 Q，问点 P 运动多少秒时，△AEQ 是等腰三角形？



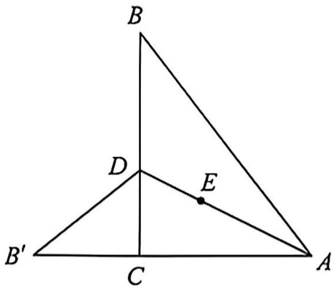
第 25 题图①



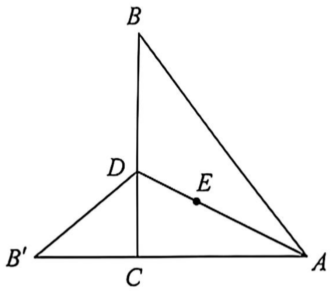
第 25 题图②



第 25 题图③



备用图

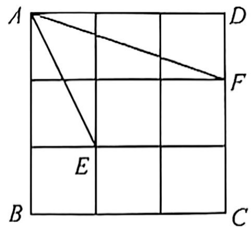


备用图

第十七周　勾股定理的逆定理

一、选择题

1　如图，正方形 $ABCD$ 是由 9 个边长为 1 的小正方形组成的，每个小正方形的顶点都叫格点，连接 AE、AF，则 $\angle EAF$ 的度数为（　　）。

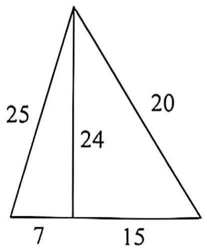


第 1 题图

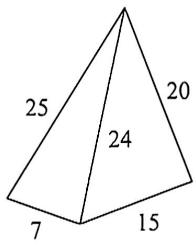
（A）30°　　（B）45°

（C）60°　　（D）35°

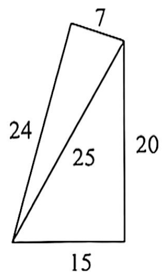
2　五根小木棒，其长度分别为 7、15、20、24、25，现将它们摆成两个直角三角形，其中正确的是（　　）。



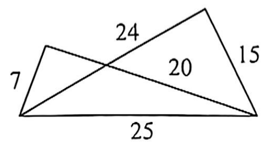
（A）



（B）

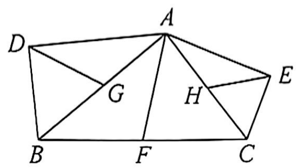


（C）



（D）

3　如图，在 Rt$\triangle ABC$、Rt$\triangle DBA$、Rt$\triangle EAC$ 中，DG、AF、EH 均为斜边中线，则以 DG、AF、EH 为边构成的三角形是（　　）。



第 3 题图

（A）锐角三角形

（B）直角三角形

（C）钝角三角形

（D）无法确定

4　若$\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，且满足 $(a-b)^2+\sqrt{a^2+b^2-c^2}=0$，则$\triangle ABC$ 的形状是（　　）。

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

（C）等腰直角三角形　　（D）等腰三角形或直角三角形

5　下列命题中是假命题的是（　　）。

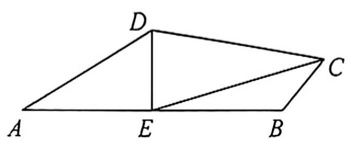
（A）在$\triangle ABC$ 中，若 $\angle B=\angle C-\angle A$，则$\triangle ABC$ 是直角三角形

（B）在$\triangle ABC$ 中，若三边长为 9、40、41，则$\triangle ABC$ 是直角三角形

（C）在$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，则$\triangle ABC$ 是直角三角形

（D）在$\triangle ABC$ 中，若 $a:b:c=5:4:3$，则$\triangle ABC$ 是直角三角形

6　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=30^\circ$，点 E 为 AB 的中点，$DE\perp AB$，交 AB 于点 E，$DE=\sqrt{3}$，$BC=1$，$CD=\sqrt{13}$，则 CE 的长是（　　）。



第 6 题图

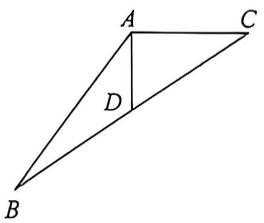
（A）$\sqrt{14}$　　（B）$\sqrt{17}$

（C）$\sqrt{15}$　　（D）$\sqrt{13}$

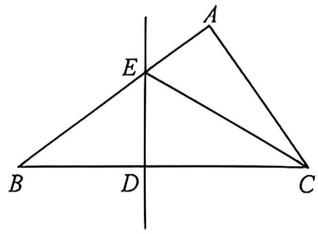
二、填空题

7 如图，在$\triangle ABC$ 中，AB　5，$AC=3$，BC 边上的中线 $AD=2$，则$\triangle ABC$ 的面积是________。

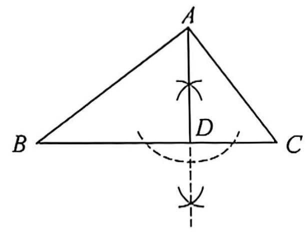
8 如图，在$\triangle ABC$ 中，DE 是边 BC 的垂直平分线，$AC=15$，$AE=8$，$BE=17$，则 $BC=$________。



第 7 题图



第 8 题图

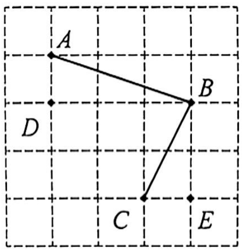


第 9 题图

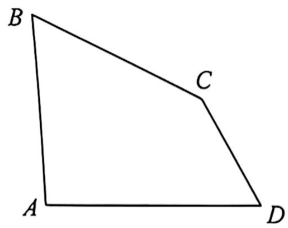
9 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=9$，$BC=15$，根据尺规作图痕迹，线段 AD 的长为________。

10 如图，在正方形网格中，点 A、B、C、D、E 是格点，则 $\angle ABD+\angle CBE$ 的度数为________。

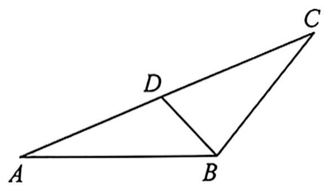
11 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=2$，$CD=1.5$，$AD=2.5$，$\angle ABC=60^\circ$，则四边形 $ABCD$ 的面积为________。（精确到 0.1。参考数据$\sqrt{3}\approx 1.732$）



第 10 题图



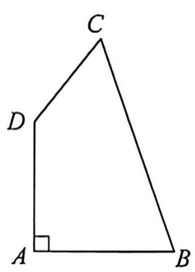
第 11 题图



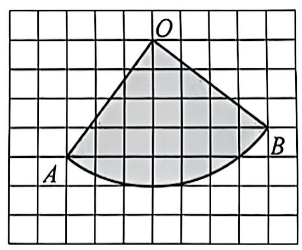
第 12 题图

12 如图，已知 $AD=CD=2\sqrt{10}$，$BD=2$，$BC=3BD$，则 AB 的长为________。

13 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$DA\perp AB$，$DA=AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{5}$，$DC=1$，则$\angle ADC$ 的度数是________。



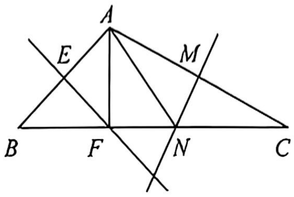
第 13 题图



第 14 题图

14 如图，扇形 OAB 是一个圆锥的侧面展开图，若小正方形方格的边长为 1，则这个圆锥的底面半径为________。

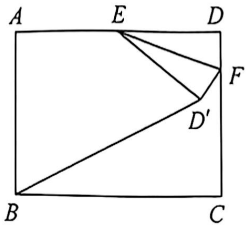
15 如图，在$\triangle ABC$中，直线EF、MN分别为AB、AC的垂直平分线，交BC于点F、N，若$BF=4$，$FN=3$，$CN=5$，则$S_{\triangle ABC}=$________。



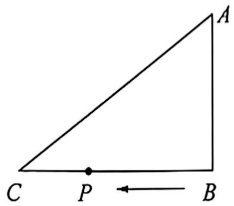
第 15 题图

16 如图，在长方形纸片$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$AD=2$，点E为AD边的中点，点F在CD边上，连接EF并将$\triangle DEF$沿EF翻折，点D的对应点为D'，连接BD'，若$BD'=2$，则$DF=$________。

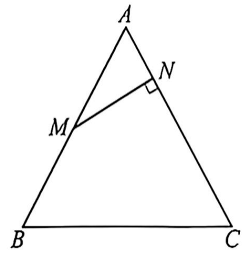
17 如图，已知$\triangle ABC$中，$BC=16\text{ cm}$，$AC=20\text{ cm}$，$AB=12\text{ cm}$，点P是BC边上的一个动点，点P从点B开始沿$B\to C\to A$方向运动，且速度为每秒2 cm，设运动的时间为t(s)，若$\triangle ABP$是以AB为腰的等腰三角形，则运动时间$t=$________。



第 16 题图



第 17 题图

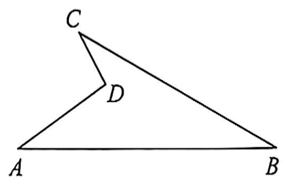


第 18 题图

18 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$BC=6$，点M为AB的中点，$MN\perp AC$于点N，则MN等于________。

三、解答题

19 如图所示的一块地，$\angle ADC=90^\circ$，$AD=4\text{ m}$，$CD=3\text{ m}$，$AB=13\text{ m}$，$BC=12\text{ m}$，求这块地的面积。

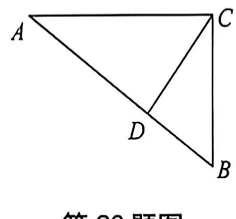


第 19 题图

20 如图，CD是$\triangle ABC$的高，若$AD=16$，$CD=12$，$BD=9$。

(1) 求AC、BC的长；

(2) 判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由。



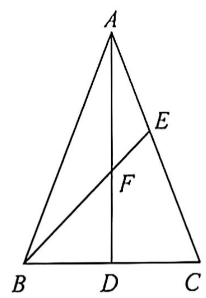
第 20 题图

21 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD为底边BC上的高线，E是AC上一点，连接BE交AD于点F，且$\angle CBE=45°$。

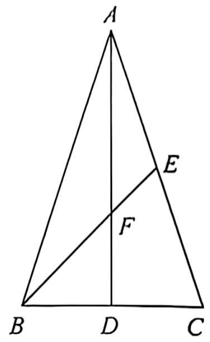
(1) 求证：$AB^2-AD^2=BD\cdot CD$；

(2) 如图①，若$AB=6.5$，$BC=5$，求AF的长；

(3) 如图②，若$AF=BC$，以BF、EF和AE为边，能围成直角三角形吗？请判断，并说明理由。



第 21 题图①

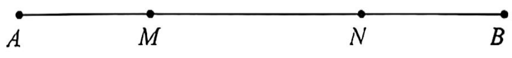


第 21 题图②

22 定义：如图，点M、N把线段AB分割成AM、MN、NB，若以AM、MN、NB为边的三角形是一个直角三角形，则称点M、N是线段AB的勾股分割点。

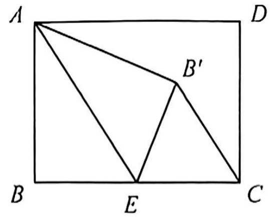
(1) 已知M、N把线段AB分割成AM、MN、NB，若$AM=1.5$，$MN=2.5$，$BN=2$，则点M、N是线段AB的勾股分割点吗？请说明理由；

(2) 已知点M、N是线段AB的勾股分割点，且AM为直角边，若$AB=24$，$AM=6$，求BN的长。



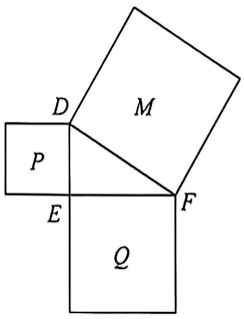
第 22 题图

23 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，点 E 是 BC 边上一点，连接 AE，把$\angle B$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在点 B'处，当$\triangle CEB'$为直角三角形时，求 BE 的长度。

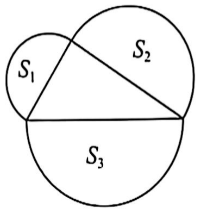


第 23 题图

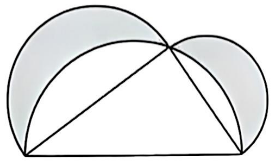
24 探究一：如图①，P、Q、M 均为正方形。



第 24 题图①



第 24 题图②



第 24 题图③

问题：(1) 若图①中的$\triangle DEF$ 为直角三角形，P 的面积为 3，Q 的面积为 10，则 M 的面积为________；

(2) 若 P 的面积为 $15\,cm^2$，Q 的面积为 $45\,cm^2$，同时 M 的面积为 $60\,cm^2$，则$\triangle DEF$ 为________三角形。

探究二：图形变化：

(3) 如图②，分别以直角三角形的三边为直径向三角形外作三个半圆，判断这三个半圆的面积之间有什么关系，并说说你的理由；

(4) 如图③，如果直角三角形两直角边长分别为 6 和 8，以直角三角形的三边为直径作半圆，你能利用上面的结论求出阴影部分的面积吗？如果能，请写出你的计算过程；如果不能，请说明理由。

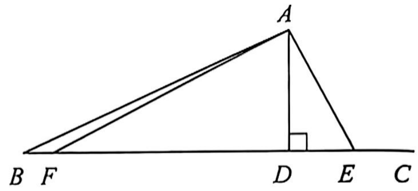
华东师大版一课一练

25 如图，$AD\perp BC$，垂足为D，且$AD=4$，$BD=9$。点E从D点沿射线DC向右以2个单位/秒的速度匀速运动，同时点F从B点沿线段BD向点D以1个单位/秒的速度匀速运动，当点F到达终点D时，点E也立即停止运动，连接AE、AF，设点F运动的时间为t秒。

(1) 当t为何值时，AD是$\triangle AEF$的中线？

(2) 当$t=1$时，判断$\triangle AEF$的形状，并说明理由；

(3) 是否存在t的值，使$\triangle AEF$是以AF为腰的等腰三角形？若存在，直接写出t的值；若不存在，请说明理由。



第25题图

第十八周　勾股定理和勾股定理的应用

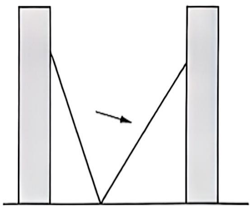
一、选择题

1　在△ABC中，$\angle C=90^\circ$，AB的垂直平分线分别交AB、AC于点D、E，若$BC=\sqrt{5}$，$AE:EC=3:2$，则AB的长为(　　)。

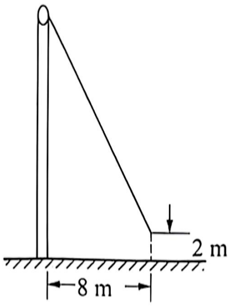
(A) $\sqrt{41}$　　(B) $\sqrt{30}$　　(C) $\sqrt{10}$　　(D) 3

2　如图，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙角的距离为0.7米，顶端距离地面2.4米，如果保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面2米，那么小巷的宽度为(　　)。

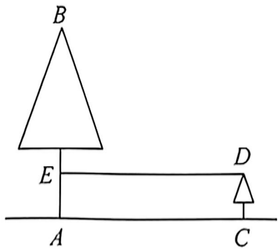
(A) 0.7米　　(B) 1.5米　　(C) 2.2米　　(D) 2.4米



第2题图



第3题图



第4题图

3　如图，小亮将升旗的绳子拉到旗杆底端，绳子末端刚好接触到地面，然后将绳子末端拉到距离旗杆8 m处，发现此时绳子末端距离地面2 m，则旗杆的高度为(滑轮上方的部分忽略不计)(　　)。

(A) 12 m　　(B) 13 m　　(C) 16 m　　(D) 17 m

4　如图，有两棵树AB和CD(都与水平地面AC垂直)，树AB高8米，树梢D到树AB的水平距离DE($DE\perp AB$)的长度为8米，$AE=CD=2$米，一只小鸟从树梢D飞到树梢B，则它至少要飞行的距离为(　　)。

(A) 10米　　(B) 9米　　(C) 8米　　(D) 7米

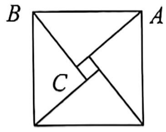
5　一架长5 m的梯子，斜靠在一竖直的墙上，这时梯子的底端距墙角4 m，若梯子的顶端下滑1 m，则梯子的底端将滑动(　　)。

(A) 0 m　　(B) 1 m　　(C) $(\sqrt{21}-3)$ m　　(D) $(\sqrt{21}-4)$ m

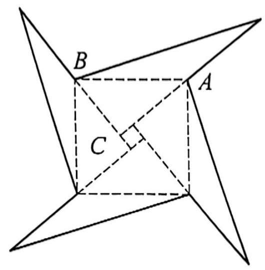
6　如图①是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图，它是由四个全等的直角三角形围成的。若$AC=6$，$BC=5$，将四个直角三角形中边长为6的直角边分别向外延长一倍，得到如图②所示的“数学风车”，则这个风车的外围周长是(　　)。

(A) 76　　(B) 72

(C) 68　　(D) 52



第6题图①



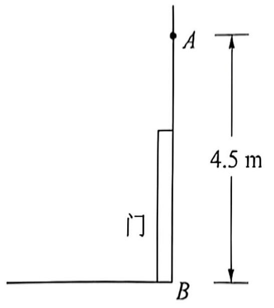
第6题图②

二、填空题

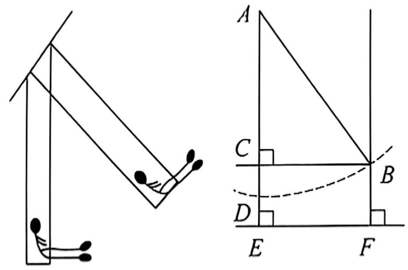
7 一艘船由 A 港沿北偏东 $60°$ 方向航行 30 km 至 B 港，然后再沿北偏西 $30°$ 方向航行 40 km 至 C 港，则 B、C 两港之间的距离为________ km。

8 如图，有一个由传感器 A 控制的灯，要装在门上方离地面 4.5 m 的墙上，任何东西只要移至该灯 5 m 及 5 m 内，灯就会自动发光，小明身高 1.5 m，他走到离墙________的地方灯刚好发光。

9 有一架秋千，当它静止时，踏板离地垂直高度 $DE=0.5$ m，将它往前推送 2 m（水平距离 $BC=2$ m）时，秋千踏板离地的垂直高度 $BF=1.5$ m，秋千的绳索始终拉得很直，则绳索 AD 的长为________ m。

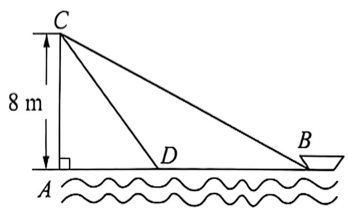


第 8 题图

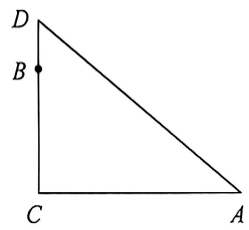


第 9 题图

10 如图，在离水面高度为 8 m 的岸上，某人用绳子拉船靠岸，开始时绳子 BC 的长为 17 m，经过一段时间后船到达点 D 的位置，此时绳子 CD 长 10 m，则船向岸边移动了________米。



第 10 题图



第 11 题图

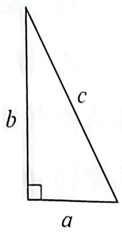
11 如图，在一棵树的 5 米高 B 处有两个猴子为抢吃池塘边水果，一只猴子爬下树跑到 A 处（离树 10 米）的池塘边，另一只爬到树顶 D 后直接跃到 A 处，距离以直线计算，如果两只猴子所经过的距离相等，则这棵树高________米。

12 在△ABC 中，$AC=3$，$BC=4$。当△ABC 是一个钝角三角形时，AB 的长可能是________（写出一个符合要求的值即可）。

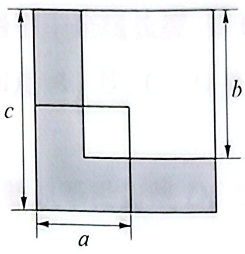
13 《九章算术》是我国古代数学名著，有题译文如下：今有门，不知其高宽；有竿，不知其长短。横放，竿比门宽长出 4 尺；竖放，竿比门高长出 2 尺；斜放，竿与门对角线长恰好相等，则门高________尺。

14 刘徽是我国魏晋时期伟大的数学家，他在《九章算术注》中指出："勾、股幂合为弦幂，明矣。"也就是说，图①中直角三角形的三边 a、b、c 存在 $a^2+b^2=c^2$ 的关系。他在书中构造了一些基本图形来解决问题。如图②，分别将以 a 为边长的正方形和 b 为边长的正方形置于以 c 为

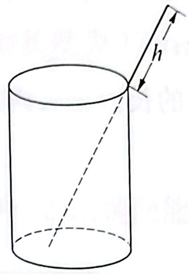
边长的大正方形的左下角和右上角，则图中阴影部分面积等于__________（用含字母 a 的代数式表示）；若 $(c-a)(c-b)=18$，则 $a+b-c=$__________。



第 14 题图①



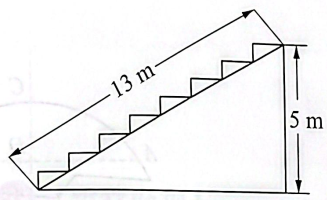
第 14 题图②



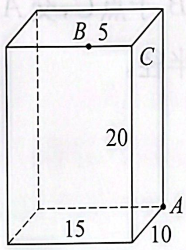
第 15 题图

15 将一根 24 cm 的筷子，置于底面直径为 15 cm，高 8 cm 的圆柱形水杯中，如图所示，设筷子露在杯子外面的长度为 h cm，则 h 的取值范围是__________。

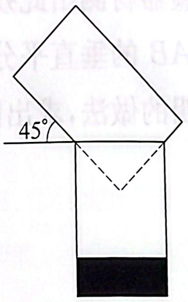
16 某大酒店为了迎接"美食文化节"，要在高 5 米，长 13 米的一段台阶面上铺上地毯，台阶的剖面如图，则地毯的长度至少需要__________米。



第 16 题图



第 17 题图



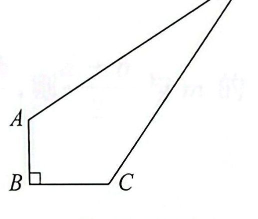
第 18 题图

17 如图，长方体的长为 15 cm，宽为 10 cm，高为 20 cm，点 B 距离 C 点 5 cm，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 A 爬到点 B，则蚂蚁爬行的最短距离是__________ cm。

18 某一实验装置的截面图如图所示，上方装置可看作一长方形，其侧面与水平线的夹角为 45°，下方是一个直径为 70 cm，高为 100 cm 的圆柱形容器，若使容器中的液面与上方装置相接触，则容器中液体的高度至少应为__________ cm。

三、解答题

19 某中学有一块四边形的空地 $ABCD$，如图所示，学校计划在空地上种植草皮，经测量 $\angle B=90°$，$AB=3$ m，$BC=4$ m，$CD=12$ m，$AD=13$ m。若每平方米草皮需要 200 元，问：学校需要投入多少资金买草皮？

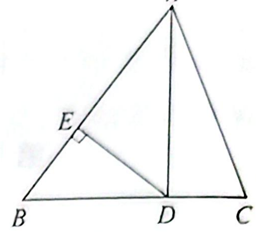


第 19 题图

20 如图，某小区有一块三角形空地 ABC，为响应“创文创卫，美化小区”的号召，该小区计划将这块三角形空地进行新的规划，在空地上挖一条与 AB 垂直的小路 DE。经测量，$AB=15$ 米，$AC=13$ 米，$AD=12$ 米，$DC=5$ 米。

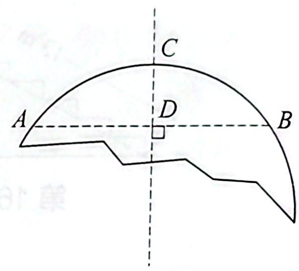
(1) 求 BD 的长；

(2) 求小路 DE 的长。



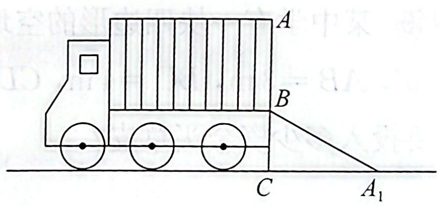
第 20 题图

21 在数学实验课上，老师拿出一块如图所示的残缺圆形工件，让同学们运用已学知识，借助一些实验器材测出此残缺圆形工件的半径，小明的做法是：在工件圆弧上取 A、B 两点，连接 AB，作 AB 的垂直平分线 CD 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C，交 AB 于点 D，测出 $AB=20\,\text{cm}$，$CD=5\,\text{cm}$，请你根据小明的做法，求出圆形工件的半径。



第 21 题图

22 如图，车高 $4\,\text{m}(AC=4\,\text{m})$，货车卸货时后面支架 AB 弯折落在地面 A_1 处，经过测量 $A_1C=2\,\text{m}$，求弯折点 B 与地面的距离。

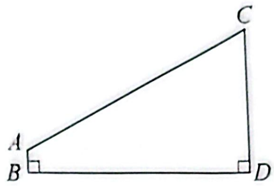


第 22 题图

23 剪纸面塑、年画风筝、中医问诊、美食扎堆……在开封市"欢乐周末·非遗市集"活动现场，诸多非遗项目集中亮相，让过往游客市民看花了眼、"迷"住了心。小明买了一个年画风筝，并进行了试放，为了解决一些问题，他设计了如下的方案：先测得放飞点与风筝的水平距离 BD 为 15 m；根据手中余线长度，计算出 AC 的长度为 17 m；牵线放风筝的手到地面的距离 AB 为 1.5 m。已知点 A、B、C、D 在同一平面内。

(1) 求风筝离地面的垂直高度 CD；

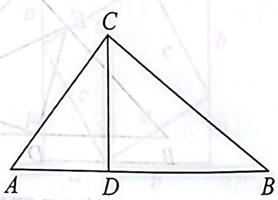
(2) 在余线仅剩 7 m 的情况下，若想要风筝沿射线 DC 方向再上升 12 m，请问能否成功？



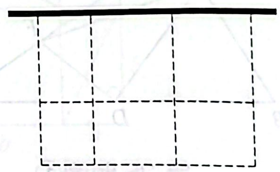
第 23 题图

24【探究发现】

某校数学兴趣小组开展了如下探究活动。



第 24 题图①



第 24 题图②

如图①，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D。设 $AD=a$，$BD=b$，$CD=m$。

(1) 请完成下列填空。

小明说：可以用含 a、b 的代数式表示 AC^2+BC^2，则 $AC^2+BC^2=(a+b)^2$；

小颖说：也可以用含 a、b、m 的代数式表示 AC^2+BC^2，则 $AC^2+BC^2=$________；

小芳说：由此可以用含 a、b 的代数式表示 m，则 $m=$________；

小亮说：可以用含 a、b 的代数式表示 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的中线长为 $\frac{a+b}{2}$，则 $\frac{a+b}{2}$ 与 m 的大小关系为________；

(2) 若 $Rt\triangle ABC$ 的面积为 6，求 m 的最大值。

【迁移应用】

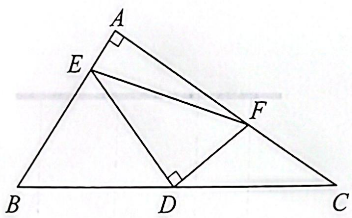
(3) 如图②,学校有一块一边靠墙(图中实线)的种植园,该兴趣小组想靠墙(墙足够长)在此规划一个面积为 32 平方米的长方形种植实验地,并用小栅栏(图中虚线)将该长方形种植实验地按如图所示方式分成 6 个小长方形区域,问:小栅栏的总长度(所有虚线长之和)最少为多少米?

25 已知直角$\triangle ABC$,$\angle BAC=90^\circ$,D 是斜边 BC 的中点,E、F 分别是 AB、AC 边上的点,且 $DE\perp DF$,连接 EF。

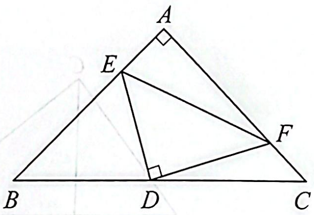
(1) 如图①,求证:$\angle BED=\angle AFD$;

(2) 求证:$BE^2+CF^2=EF^2$;

(3) 如图②,当 $\angle ABC=45^\circ$ 时,若 $BE=12$,$CF=5$,求$\triangle DEF$ 的面积。



第 25 题图①



第 25 题图②

单元练习二十二

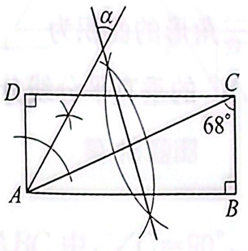
一、选择题

1 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，若 $BC+AC=14\text{ cm}$，$AB=10\text{ cm}$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的面积是(　　)。

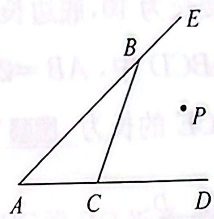
(A) 24　　(B) 48　　(C) 32　　(D) 16

2 如图，在长方形 $ABCD$ 中进行如下作图，依据尺规作图的痕迹，则 $\angle\alpha$ 的余角等于(　　)。

(A) 34°　　(B) 44°　　(C) 56°　　(D) 68°



第 2 题图

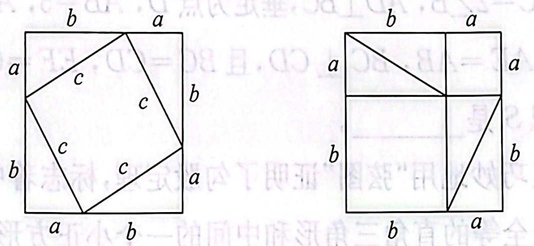


第 3 题图

3 如图，已知点 P 到 AE、AD、BC 的距离相等，下列说法：①点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上；②点 P 在 $\angle CBE$ 的平分线上；③点 P 在 $\angle BCD$ 的平分线上；④点 P 是 $\angle BAC$、$\angle CBE$、$\angle BCD$ 的平分线的交点。其中正确的是(　　)。

(A) ④　　(B) ②③　　(C) ①②③　　(D) ①②③④

4 在证明勾股定理时，甲、乙两位同学给出如图所示的两种方案，对于甲、乙两种方案，下列判断正确的是(　　)。



甲　　乙

第 4 题图

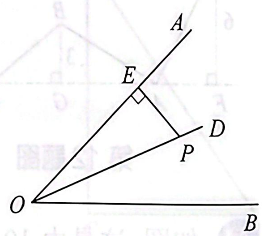
(A) 甲正确，乙不正确　　(B) 甲不正确，乙正确

(C) 甲、乙都正确　　(D) 甲、乙都不正确

5 如图，OP 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 到 OA 的距离为 5。点 N 是 OB 上的任意一点，则线段 PN 的取值范围为(　　)。

(A) $PN<5$　　(B) $PN>5$

(C) $PN\geqslant 5$　　(D) $PN\leqslant 5$



第 5 题图

6 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，D、E 分别为线段 AB、AC 上一点，且 $AD=AE$，连接 BE、CD 交于点 G，延长 AG 交 BC 于点

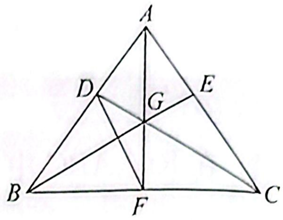
F。以下四个结论正确的是(　　)。

① $BF=CF$;

② 若 $BE\perp AC$,则 $CF=DF$;

③ 连接 EF,若 $BE\perp AC$,则 $\angle DFE=2\angle ABE$;

④ 若 BE 平分 $\angle ABC$,则 $FG=\frac{3}{2}$。



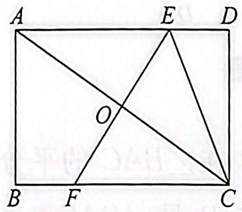
第 6 题图

(A) ①②③　　(B) ③④　　(C) ①②④　　(D) ①②③④

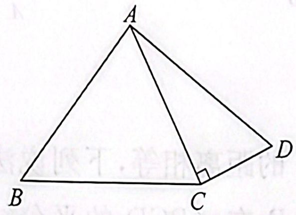
二、填空题

7 等腰三角形的腰长为 10,底边长为 12,则这个等腰三角形的面积为__________。

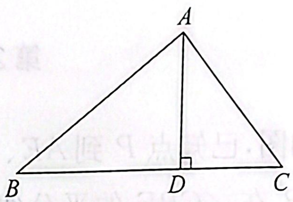
8 如图,长方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=3$,对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD、BC 于点 E、F,连接 CE,则 CE 的长为________。



第 8 题图



第 9 题图



第 11 题图

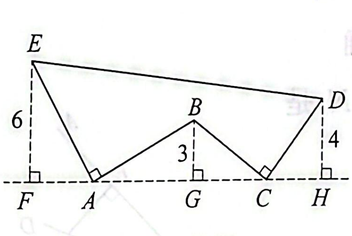
9 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=90°$,$AB=BC=AD=5$,对角线 $AC\perp CD$,则线段 CD 的长为_________。

10 已知△ABC 中,$AB=17$,$AC=10$,BC 边上的高 $AD=8$,则边 BC 的长为__________。

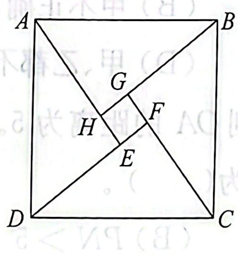
11 如图,在△ABC 中,$\angle C=2\angle B$,$AD\perp BC$,垂足为点 D,$AB=5$,$AD=3$,则 $AC=$________。

12 如图,$AE\perp AB$,且 $AE=AB$,$BC\perp CD$,且 $BC=CD$,$EF=6$,$BG=3$,$DH=4$,图中实线所围成的图形的面积 S 是________。

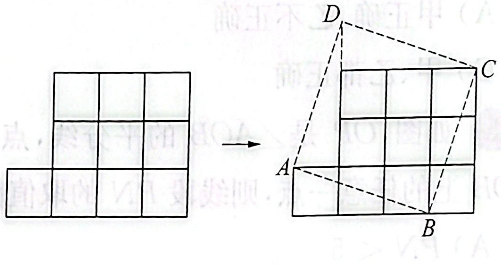
13 我国古代数学家赵爽巧妙地用"弦图"证明了勾股定理,标志着中国古代的数学成就。如图所示的"弦图"是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形 $EFGH$ 拼成的一个大正方形 $ABCD$,若直角三角形的斜边长为 10,一条直角边长为 8,则小正方形 $EFGH$ 的边长为__________。



第 12 题图



第 13 题图

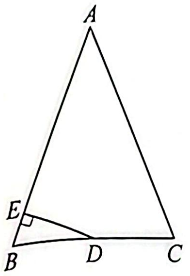


第 14 题图

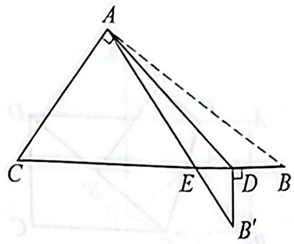
14 如图,这是由 10 个边长均为 1 的小正方形组成的图形,我们沿图的虚线 AB、BC 将它剪开后,重新拼成一个大正方形 $ABCD$,则正方形 $ABCD$ 的边长为________。

15 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=13$，$BC=10$，点D为BC的中点，$DE\perp AB$，垂足为点E，则$DE=$________。

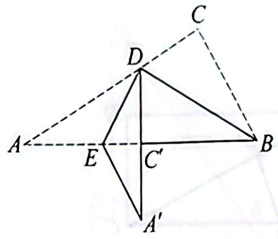
16 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AC=6$，$AB=8$，D为BC边上一点，连接AD。将$\triangle ABD$沿AD折叠得到$\triangle AB'D$，AB'交BC于点E。若$B'D\perp BC$，则BD的长为________。



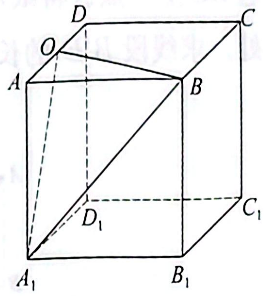
第 15 题图



第 16 题图



第 17 题图



第 18 题图

17 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$。将$\triangle ABC$沿BD折叠，使点C落在斜边上的点C'处，再沿DE折叠使点A落在DC'延长线上的点A'处，若$BC=5\,\mathrm{cm}$，则折痕DE的长为________cm。

18 如图，正方体的棱长为2，O为AD的中点，则O、A_1、B三点为顶点的三角形面积为________。

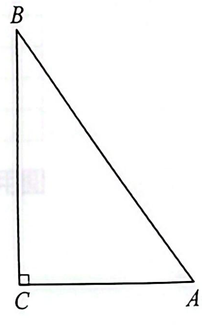
三、解答题

19 $\triangle ABC$的三边长分别为a、b、c，且a、b、c满足$|a-5|+\sqrt{2c-26}+(b^2-24b+144)=0$，试判断该三角形的形状，并求出该三角形的面积。

20 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$。

(1) 尺规作图：在$\triangle ABC$的BC边上找到点D，使得点D到AB的距离等于CD；（请用圆规和无刻度直尺作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2) 若$AC=3$，$BC=4$，求CD的长。

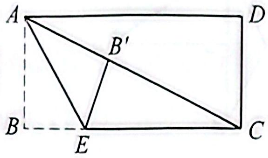


第 20 题图

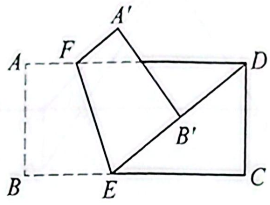
21 请你运用所学知识,解决下面的问题:

(1) 如图①,在长方形纸片 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AD=12$,将纸片折叠,使 AB 落在对角线 AC 上,折痕为 AE(点 E 在边 BC 上),点 B 落在点 B' 处,求 CE 的长度;

(2) 如图②,有一张长方形纸片 $ABCD$, $AB=6$, $AD=13$, F 为边 AD 边上一点, $AF=3$, E 为边 BC 上一点。将纸片折叠,折痕为 EF,使点 B 恰好落在线段 DE 上的点 B' 处,点 A 落在点 A' 处。求线段 $B'D$ 的长度。



第 21 题图①

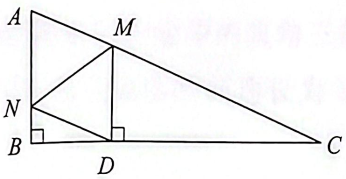


第 21 题图②

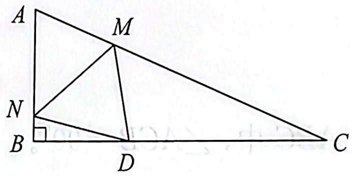
22 在△ABC 中,$\angle ABC=90°$,沿着 MN 翻折使得点 A 的对应点 D 落在 BC 上,折痕为 MN。

(1) 如图①,若 $MD\perp BC$,试判断 DN 与 AM 的关系,并说明理由;

(2) 如图②,若 $AB=5$, $BC=12$, $CD=2BD$,求线段 BN 的长度。



第 22 题图①

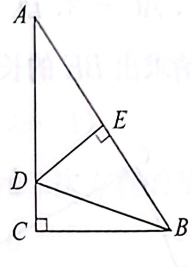


第 22 题图②

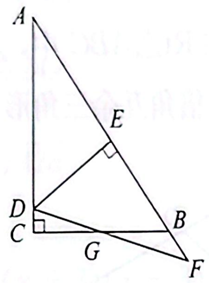
23 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=8$，$BC=6$，沿 AB 的垂线 DE 折叠$\triangle ABC$。

(1) 如图①，若点 A 落在点 B 处，求 AD 的长；

(2) 如图②，若点 A 落在 AB 的延长线上的点 F 处，AD 折叠后与 CB 交于点 G，且 $CG=BG$，求 AD 的长。



第 23 题图①



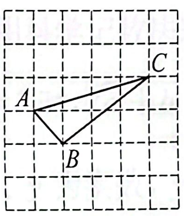
第 23 题图②

24 在$\triangle ABC$ 中，AB、BC、AC 三边的长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{17}$，求这个三角形的面积。小明同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格(每个小正方形的边长为 1)，再在网格中画出格点$\triangle ABC$(即$\triangle ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处)，如图①所示。这样不需求$\triangle ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积。

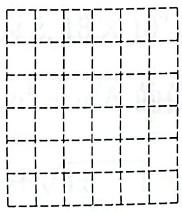
(1) 请你将$\triangle ABC$ 的面积直接填写在横线上__________；

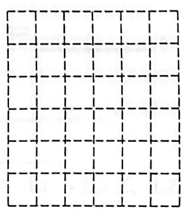
(2) 我们把上述求$\triangle ABC$ 面积的方法叫做构图法，若$\triangle ABC$ 三边 AB、BC、AC 的长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，请利用图②的正方形网格(每个小正方形的边长为 1)画出相应的$\triangle ABC$；

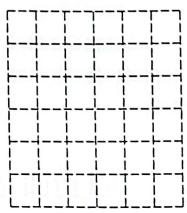
(3) 若$\triangle ABC$ 中有两边的长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{10}$，且$\triangle ABC$ 的面积为 2，试运用构图法在图③的正方形网格(每个小正方形的边长为 1)中画出所有符合题意的$\triangle ABC$(全等的三角形视为同一种情况)，并求出它的第三条边长，填写在横线上__________。



第 24 题图①


第 24 题图②


第 24 题图③

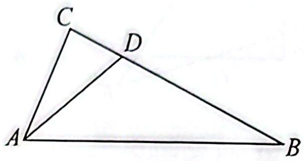

第 24 题备用图

25 定义:在任意$\triangle ABC$中,如果一个内角度数的2倍与另一个内角度数的和为$90°$,那么称此三角形为“倍角互余三角形”。

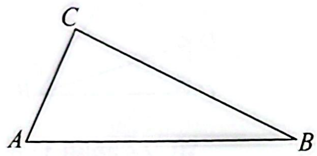
(1)【基础巩固】若$\triangle ABC$是“倍角互余三角形”,$\angle C>90°$,$\angle A=60°$,则$\angle B=$______$°$;

(2)【尝试应用】如图①,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,点D为线段BC上一点,若$\angle CAD$与$\angle CAB$互余。求证:$\triangle ABD$是“倍角互余三角形”;

(3)【拓展提高】如图②,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$AC=3$,$BC=4$,试问在边BC上是否存在点E,使得$\triangle ABE$是“倍角互余三角形”?若存在,请求出BE的长;若不存在,请说明理由。



第25题图①



第25题图②

期中练习

一、选择题(每题 3 分,共 18 分)

1 下列二次根式中,与$\sqrt{a+b}$互为有理化因式的是(　　)。

(A) $\sqrt{a-b}$　　(B) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　(C) $\sqrt{a}+b$　　(D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2 下列二次根式中,最简二次根式是(　　)。

(A) $\sqrt{\frac{5}{3}a}$　　(B) $\sqrt{24x^3}$

(C) $\sqrt{3(a^2+2a+1)}\ (a\geqslant -1)$　　(D) $\sqrt{42a}$

3 下列方程中,属于一元二次方程的是(　　)。

(A) $x^3+x^2+2x+1=0$　　(B) $(x+3)(x-3)+4=0$

(C) $x-\frac{1}{x}=0$　　(D) $x^2+2xy+y^2=0$

4 如果关于x的一元二次方程$x^2-2x+a=0$有两个实数根,那么a的取值范围是(　　)。

(A) $a\geqslant 1$　　(B) $a\leqslant 1$　　(C) $a>1$　　(D) $a<1$

5 无理数$4\sqrt{6}$的值在(　　)。

(A) 8 和 9 之间　　(B) 9 和 10 之间　　(C) 10 和 11 之间　　(D) 11 和 12 之间

6 已知$x^2-7xy+12y^2=0$,那么$\frac{x-5y}{x+5y}$的值是(　　)。

(A) $-\frac{1}{4}$　　(B) $-\frac{1}{9}$　　(C) $-\frac{1}{4}$或$-\frac{1}{9}$　　(D) $\frac{1}{4}$或$\frac{1}{9}$

二、填空题(每题 3 分,共 36 分)

7 在$\sqrt{16}$、$-\sqrt{48}$、$\frac{\sqrt{72}}{2}$、$\sqrt{0.2}$中,与$\sqrt{2}$是同类二次根式的是________。

8 计算:$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}=$________。

9 把下列小数化成分数:(1) $0.\dot{3}\dot{6}=$________;(2) $0.1\dot{1}0\dot{2}=$________。

10 不等式$\sqrt{2}x-3<\sqrt{3}x$的解集是________。

11 218 亿用科学记数法表示为2.18×10^n,则$n=$________。

12 当$ab=3$时,$\sqrt{a+b}\div\sqrt{ab^2+a^2b}$的值是________。

13 已知x、y为实数,$y=\frac{1}{3}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{1-4x}$,那么$4x+3y$的值是________。

14 比较大小:$2\sqrt{7}$________$3\sqrt{5}$。(填写“>”“<”或“=”)

15 若$\frac{x-1}{\sqrt{x-4}}$有意义,则x的取值范围为____________。

16 当$x=-2\sqrt{2}$时,$\sqrt{x^2+4}=$________。

17 已知$(a^2+b^2)(a^2+b^2-2)=8$，那么$a^2+b^2=$________。

18 用一根100厘米长的铅线，弯成一个面积是525平方厘米的长方形模型，则这个长方形相邻两边的长分别是________厘米。

三、简答题（每题5分，共25分）

19 计算：$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6})+\sqrt{8}$。

20 计算：$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\div\sqrt{\frac{a}{bc}}\ (b>0)$。

21 解方程：$\sqrt{2}(x^2-1)=x(x-2)+1$。

22 解方程：$x^2-2x-9999=0$。

23 已知关于x的一元二次方程$(m-2)x^2+(2m+1)x+m=2$有两个实数根，求m的取值范围。

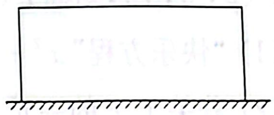
四、解答题(每题 7 分,共 21 分)

24. 某建筑工程队,在工地一边的靠墙处,用 120 米长的铁栅栏围一个所占地面为长方形的临时仓库,铁栅栏只围三边,按下列要求,分别求长方形的两条邻边的长。

(1) 长方形的面积是 1152 平方米;

(2) 长方形的面积是 1800 平方米;

(3) 长方形的面积是 2000 平方米。



第 24 题图

25. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个实数根,且其中一个根比另一个根大 1,那么称这样的方程为“连根方程”。例如,一元二次方程 $x^2-x=0$ 的两个根是 $x_1=0$, $x_2=1$,则方程 $x^2-x=0$ 是“连根方程”。

(1) 通过计算,判断方程 $x^2-3x+2=0$ 是否是“连根方程”;

(2) 已知关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-2m=0$(m 是常数)是“连根方程”,求 m 的值;

(3) 若关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$(b、c 是常数)是“连根方程”,请直接写出 b、c 之间满足的关系式。

26 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根均为整数，则称方程为"快乐方程"。通过计算发现，任何一个"快乐方程"的判别式 b^2-4ac 一定为完全平方数。现规定 $F(a,b,c)=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 为该"快乐方程"的"快乐数"。例如"快乐方程" $x^2-3x-4=0$ 的两根均为整数，其"快乐数" $F(1,-3,-4)=\frac{4\times1\times(-4)-(-3)^2}{4\times1}=-\frac{25}{4}$，若有另一个"快乐方程" $px^2+qx+r=0(p\neq0)$ 的"快乐数" $F(p,q,r)$，且满足 $r\cdot F(a,b,c)=c\cdot F(p,q,r)$，则称 $F(a,b,c)$ 与 $F(p,q,r)$ 互为"开心数"。

(1) "快乐方程" $x^2-2x-3=0$ 的"快乐数"为________；

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+m^2-2m-3=0$（m 为整数，且 $1<m<6$）是"快乐方程"，求 m 的值，并求该方程的"快乐数"；

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+m+1=0$ 与 $x^2-(n+2)x+2n=0$（m、n 均为整数）都是"快乐方程"，且其"快乐数"互为"开心数"，求 n 的值。

期末练习

一、选择题(每题 2 分,共 12 分)

1 将 0.000015 用科学记数法表示为(　　)。

(A) 1.5×10^{-5}　　(B) 1.5×10^{-4}　　(C) 1.5×10^{-3}　　(D) 1.5×10^{-2}

2 若 $k<\sqrt{90}<k+1$(k 是整数),则 $k=$(　　)。

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

3 设 $m=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{45}$,则实数 m 所在的范围是(　　)。

(A) $m<-5$　　(B) $-5<m<-4$

(C) $-4<m<-3$　　(D) $m>-3$

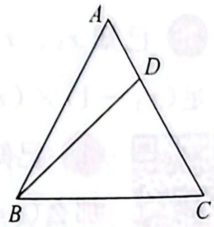
4 若方程 $x^2-3x+m=0$ 有一根是 1,则另一根是(　　)。

(A) 1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

5 如图,在边长为 6 的等边三角形 ABC 中,D 为边 AC 上的三等分点,则 BD 的长为(　　)。

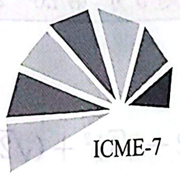
(A) 5　　(B) $4\sqrt{2}$

(C) $2\sqrt{7}$　　(D) $\frac{28}{5}$

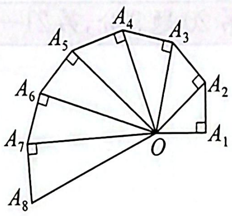


第 5 题图

6 图①是第七届国际数学教育大会(ICME-7)会徽图案,它是由一串有公共顶点 O 的直角三角形(如图②)演化而成的。如果图②中的 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$,那么 OA_8 的长为(　　)。



第 6 题图①



第 6 题图②

(A) $\sqrt{10}$　　(B) 4　　(C) 3　　(D) $2\sqrt{2}$

二、填空题(每题 2 分,共 24 分)

7 若二次根式 $\sqrt{2x-5}$ 有意义,则 x 所能取的最小正整数为________。

8 一元二次方程 $x^2-\sqrt{5}x+\frac{5}{4}=0$ 的根为________。

9 在实数范围内分解因式:$2x^2-5x-1=$________。

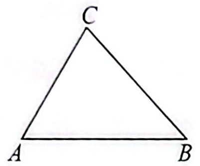
10 设 x_1、x_2 是方程 $x^2-2x-11=0$ 的两个根,$(x_1^2+2)(x_2^2+2)=$________。

11 若关于 x 的方程 $\frac{x-1}{x-3}+\frac{3-x}{x+1}=\frac{3x+a}{x^2-2x-3}$ 的解为负数,则 a 的取值范围是________。

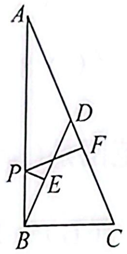
12 已知 n 是正整数，且 $\sqrt{18-n}$ 也是正整数，写出一个满足条件的 n 的值：$n=$________。

13 如图，在锐角三角形 ABC 中，$AC=2\sqrt{3}$，$AB=3+\sqrt{3}$，$\angle B=45°$，则 $BC=$________。

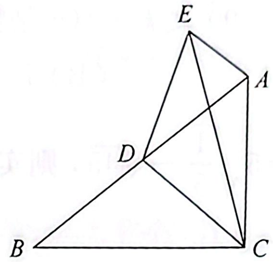
14 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，点 D 是斜边 AC 的中点，点 P 在 AB 上，$PE\perp BD$ 于点 E，$PF\perp AC$ 于点 F，若 $AB=6$，$BC=3$，则 $PE+PF=$________。



第 13 题图



第 14 题图



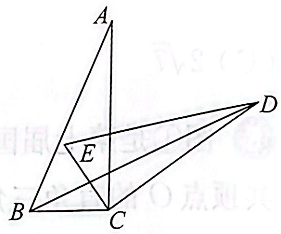
第 15 题图

15 如图，点 D 是$\triangle ABC$ 的边 AB 的中点，将$\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折能与$\triangle ECD$ 重合。若 $AB=6$，$CD=3$，$AE=2$，则点 C 到直线 AB 的距离为________。

16 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+(3k+1)x+2k^2+1=0$ 的两个不相等的实数根，且满足 $(x_1-1)\times(x_2-1)=8k^2$，则 k 的值为________。

17 已知 α、β 是关于 x 的方程 $x^2-2x+m+6=0$ 的两实数根，那么 $(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2$ 的最小值为________。

18 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4\sqrt{3}$，$BC=3$。如果将$\triangle ABC$ 绕着点 C 顺时针旋转 $60°$得到$\triangle DEC$，其中点 A、B 的对应点分别为点 D、E，连接 BD，那么 BD 的长等于________。



第 18 题图

三、解答题（第 19 题 6 分，第 20 题 9 分，第 21—25 题每题 5 分，第 26—29 题每题 6 分，共 64 分）

19 计算：

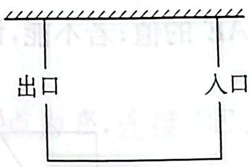
(1) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-5\sqrt{\frac{1}{5}}$；

(2) $(2-\sqrt{3})^2+(\sqrt{27}-\sqrt{12})\div\sqrt{3}$。

20 解方程：(1) $2x^2+3x-1=0$；　　　　(2) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7x+\frac{7}{x}+2=0$；

(3) 解方程：$\frac{2x}{x+1}-\frac{m+1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x}$（$m$ 为常数）。

21 工作人员准备利用 26 米长的墙为一边，用 48 米隔栏绳为另三边，设立一个面积为 300 平方米的长方形等候区，如图，为了方便群众进出，在两边空出两个各为 1 米的出入口（出入口不用隔栏绳）。假设这个长方形平行于墙的一边为长，垂直于墙的一边为宽，那么围成的这个长方形的长与宽分别是多少米呢？

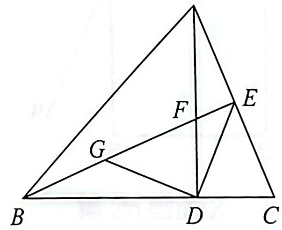


第 21 题图

22 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=CB$，$\angle ABC=45^\circ$，高 AD 与高 BE 相交于点 F，G 为 BF 的中点。

求证：(1) $DG=DE$；

(2) $\angle DEG=\angle DEC$。

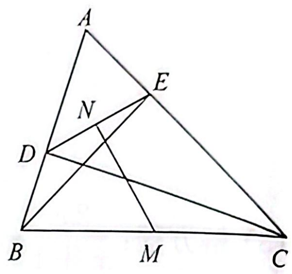


第 22 题图

23 如图，已知锐角$\triangle ABC$中CD、BE分别是AB、AC边上的高，M、N分别是线段BC、DE的中点。求证：

(1) $MN \perp DE$；

(2) 若$\angle A = 60^\circ$，求证：$\triangle DME$是等边三角形。



第 23 题图

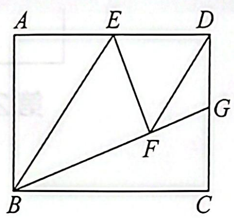
24 长方形$ABCD$中，$AB=6$，$AD=8$，点E为边AD上一点，将$\triangle ABE$沿BE折叠后得到$\triangle BEF$。

(1) 如图①，若点E为AD的中点，延长BF交边CD于点G。

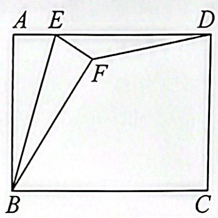
① 求证：$DG=FG$；

② 求FG的长度。

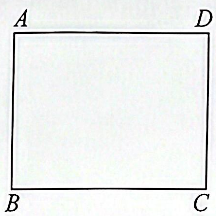
(2) 如图②，若点E为边AD上的一动点，连接FD，$\triangle DEF$能否为直角三角形？若能，求出AE的值；若不能，请说明理由。



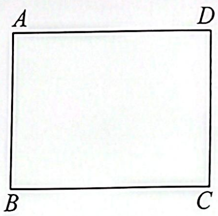
第 24 题图①



第 24 题图②



第 24 题备用图



第 24 题备用图

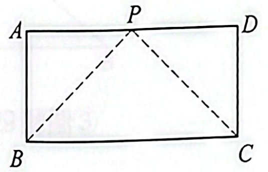
25 阅读材料:各类方程的解法。

求解一元一次方程,根据等式的基本性质,把方程转化为 $x=a$ 的形式;求解二元一次方程组,把它转化为一元一次方程来解;求解三元一次方程组,把它转化为解二元一次方程组;求解一元二次方程,把它转化为两个一元一次方程来解。它们有一个共同的基本思想——转化,把未知转化为已知。用“转化”的思想,我们还可以解一些新的方程。例如,一元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$,可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$,解方程 $x=0$ 和 $x^2+x-2=0$,可得方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解。

(1) 问题:方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解是 $x_1=0$,$x_2=$________,$x_3=$________;

(2) 拓展:用“转化”思想求方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解;

(3) 应用:如图,已知长方形草坪 $ABCD$ 的长 $AD=8\,\text{m}$,宽 $AB=3\,\text{m}$,小华把一根长为 $10\,\text{m}$ 的绳子的一端固定在点 B,沿草坪边 BA、AD 走到点 P 处,把长绳 PB 段拉直并固定在点 P,然后沿草坪边沿 PD、DC 走到点 C 处,把长绳剩下的一段拉直,长绳的另一端恰好落在点 C 处。求 AP 的长。



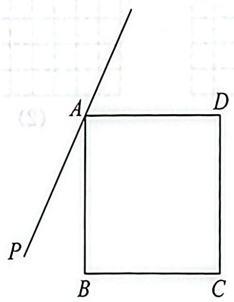
第 25 题图

26 在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP,点 B 关于直线 AP 的对称点为 E,连接 BE、DE,其中 DE 交直线 AP 于点 F。

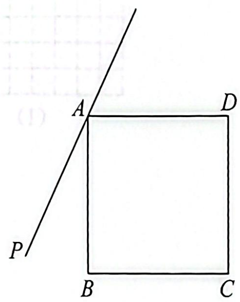
(1) 依题意补全图①;

(2) 若 $\angle PAB=20^\circ$,求 $\angle ADF$ 的度数;

(3) 如图②,若 $45^\circ<\angle PAB<90^\circ$,用等式表示线段 AB、FE、FD 之间的数量关系,并证明。



第 26 题图①



第 26 题图②

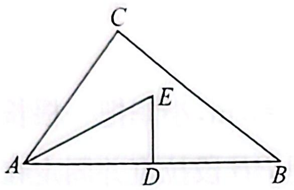
27 如图①，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90^\circ$，$\angle CAB$ 的平分线 AE 与 AB 的垂直平分线 DE 相交于点 E。

(1) 如图②，若点 E 正好落在边 BC 上。

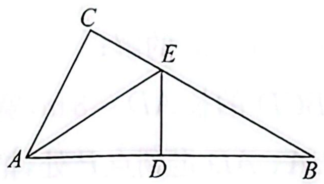
① 求 $\angle B$ 的度数；

② 证明：$BC=3DE$。

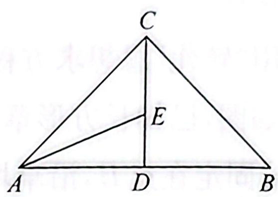
(2) 如图③，若点 E 满足 C、E、D 共线。线段 AD、DE、BC 之间是否满足 $AD+DE=BC$，若满足请给出证明；若不满足，请说明理由。



第 27 题图①



第 27 题图②



第 27 题图③

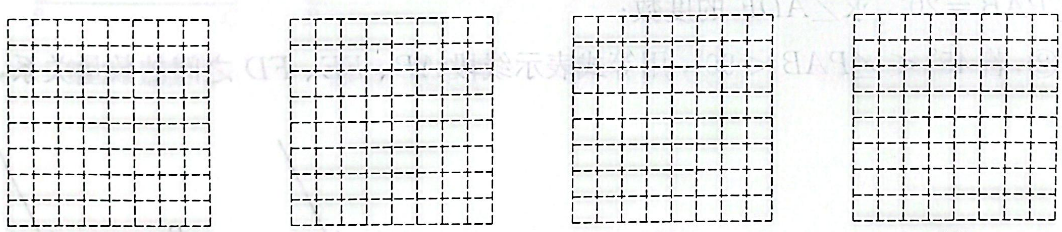
28 下面有 4 张形状、大小完全相同的方格纸，方格纸中的每个小正方形的边长都是 1，请在方格纸中分别画出符合要求的图形，所画图形各顶点必须与方格纸中小正方形的顶点重合，具体要求如下：

(1) 画一个直角边长为 4，面积为 6 的直角三角形；

(2) 画一个底边长为 4，面积为 8 的等腰三角形；

(3) 画一个面积为 5 的等腰直角三角形；

(4) 画一个边长为 $2\sqrt{2}$，面积为 6 的等腰三角形。



(1)　(2)　(3)　(4)

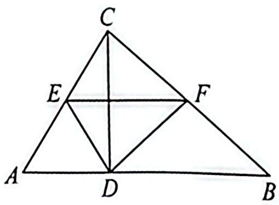
第 28 题图

29 小明同学在一次数学活动课中对直角三角形的折叠问题进行了探究，请你一起思考并完成以下问题。

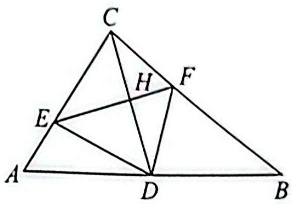
(1) 如图①，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，将直角三角形纸片 ABC 沿某条直线折叠，使顶点 C 落在斜边 AB 上，EF 为折痕，且 $EF\parallel AB$。若 $EC=3$，$FC=4$，则 CD 的长为________。

(2) 如图②，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，将直角三角形纸片 ABC 沿某条直线折叠，使直角顶点 C 落在斜边中点 D 的位置，EF 为折痕，CD 与 EF 交于 H。若 $EC=4$，$FC=3$，求 AB 的长。

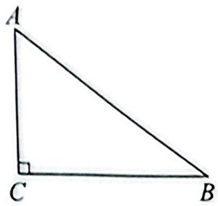
(3) 如图③，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$CA=3$，$BC=4$。点 E 为斜边 AB 上一点，将直角三角形纸片 ABC 沿 CE 折叠，使得点 A 的对应点 D 落在 BC 边上，连接 ED。请把图形按要求补充完整并求折痕 CE 的长。



第 29 题图①



第 29 题图②



第 29 题图③

第19章 实数

第一周 算术平方根 平方根 立方根

1 D 2 C 3 B 4 D 5 C 6 B

7 ±2 8 $\pm\sqrt{3}$ 9 -2 10 0.7071；$-0.006\ 137$ 11 ±2 或 ±4 12 $\pm\frac{3}{8}$

13 -5 14 3

15 2 [提示：因为 a、b、c 是正数，且满足 $a+b+c=10$，所以 $a=10-b-c$，$b=10-a-c$，$c=10-a-b$，所以原式 $=\frac{10-b-c}{b+c}+\frac{10-a-c}{c+a}+\frac{10-a-b}{a+b}=\frac{10}{b+c}+\frac{10}{c+a}+\frac{10}{a+b}-3=11-3=8$，所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的立方根为2。]

16 -5 [提示：$\sqrt[3]{200a}=\sqrt[3]{8\times25a}=\sqrt[3]{2^3\times5^2a}$，当 $a=-5$ 时，$200a=-1000$，是 -10 的立方，所以 $\sqrt[3]{-1000}=-10$ 是一个整数，且此时 a 是符合条件的最大的负整数，故 $a=-5$。]

17 因为 $\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$，所以 $1-a^2=1$ 或 $1-a^2=0$ 或 $1-a^2=-1$。当 $1-a^2=1$ 时，$a=0$；当 $1-a^2=0$ 时，$a=\pm1$；当 $1-a^2=-1$ 时，$a=\pm\sqrt{2}$。综上所述，$a=0$ 或 ±1 或 $\pm\sqrt{2}$。

18 0 或 64 [提示：$\sqrt[3]{x}=\frac{\sqrt{x}}{2}$，所以 $(\sqrt[3]{x})^6=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^6$，可得 $x^2=\left(\frac{x}{4}\right)^3$，因此 $x^2(x-64)=0$，解得 $x_1=x_2=0$ 或 $x_3=64$。]

19 (1) ±1 (2) ±1 20 -8 或 0 21 2 22 $-1-\sqrt{3}$ 23 (1) 18 厘米 (2) 30 平方厘米

24 $a-b+c=4$ 或 8。原式 $=|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+(a-c)^2=2$，① $b^2=0$ 时，$a-3$ 可以为任意数，$b=0$，$|2a-4|+2+a^2+c^2=2+2ac$，因为 $|2a-4|+|(a-c)^2=0$，所以 $a=2$，$c=2$，$a-b+c=2-0+2=4$；

② $b^2>0$ 时，$a\geqslant3$，所以 $2a-4-2\geqslant0$，所以整理得 $|2a-4-2|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+(a-c)^2=0$，所以 $a=3=c$，$b=-2$，所以 $a-b+c=8$。

25 因为 $\begin{cases}x-199+y\geqslant0,\\199-x-y\geqslant0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x+y\geqslant199,\\x+y\leqslant199,\end{cases}$ 所以 $x+y=199$。易知 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$，由非负数及其性质，得 $\begin{cases}3x+5y-2-m=0,\\2x+3y-m=0,\end{cases}$ 解得 $m=201$。

第二周　有理数的小数形式　无理数

1 A　2 A　3 A　4 A　5 C　6 B

7 (1) $\frac{7}{9}$　(2) $\frac{7}{15}$　(3) $\frac{2}{165}$　8 (1) 0.359375　(2) $0.2\dot{7}$　(3) $3.\dot{1}4285\dot{7}$　9 (1) $=$

(2) $<$　10 $\sqrt{5}$　11 $\pm\sqrt{5}$　12 $-\sqrt{2}$

13 186 [提示:因为 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, …, $10^2=100$,所以在 1, 2, 3, …, 100 这 100 个自然数的算术平方根中,有理数有 10 个,所以无理数有 90 个。因为$1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64<100$, $5^3=125>100$,所以在 1, 2, 3, …, 100 这 100 个自然数的立方根中,有理数有 4 个,所以无理数有 96 个,所以在 1, 2, 3, …, 100 这 100 个自然数的算术平方根和立方根中,无理数共有 $90+96=186$(个)。]

14 $a=13$(答案不唯一)　15 9　16 $\pm\sqrt{5}$　17 8 [提示:由题意可得,设第三边为 x, $\sqrt{22}-4<x<\sqrt{22}+4$,因为 $4<\sqrt{22}<5$,所以 $0<\sqrt{22}-4<1$, $8<\sqrt{22}+4<9$,因为第三条边长为整数,所以 x 可能为:1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,则第三条边长的最大值为 8。]

18 ±60

19 (1) $a=25$, $b=7$, $c=3$　(2) ±8

20 设正方形大台布的边长为 x m,则 $x^2=2$,解得 $x=\sqrt{2}$。因为$1.414^2\approx2$,且 $1.414>1.4$,所以这块大台布能盖住现在的新桌子。

21 (1) 因为 $9<10<16$,所以 $3<\sqrt{10}<4$,所以 $a=3$, $b=\sqrt{10}-3$,所以$(-a)^3+(b+3)^2=-17$。

(2) 因为 $(\sqrt{3}-1)m+2n=\sqrt{3}+3$,所以$\sqrt{3}m-m+2n=\sqrt{3}+3$,因为 m、n 都是有理数,所以 $m=1$, $-m+2n=3$,所以 $n=2$,所以 $m+n=1+2=3$,所以 $m+n$ 的平方根为 $\pm\sqrt{3}$。

22 (1) 由题意,得 $4x-y^2+1=0$, $y^2-9=0$,所以 $x=2$, $y=\pm3$

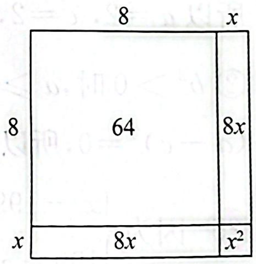
(2) 当 $x=2$, $y=3$ 时,$\sqrt[x]{y+6}=\sqrt{3+6}=3$,是有理数;当 $x=2$, $y=-3$ 时,$\sqrt[x]{y+6}=\sqrt{-3+6}=\sqrt{3}$,是无理数。

23 (1) 8　(2) 因为面积为 76 的正方形边长是$\sqrt{76}$,且 $8<\sqrt{76}<9$,

所以设$\sqrt{76}=8+x$,其中 $0<x<1$,画出如图示意图。

因为图中 $S_{正方形}=8^2+2\cdot8\cdot x+x^2$, $S_{正方形}=76$,

所以$8^2+2\times8\cdot x+x^2=76$,当$x^2$ 较小时,省略x^2,得 $16x+64\approx76$,解得 $x\approx0.75$,所以$\sqrt{76}\approx8.75$。

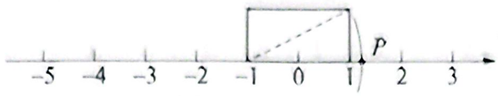


第 23 题图

24 (1) B　(2) $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$, $1+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+1$

(3) 因为大正方形的面积为 5,所以小长方形的对角线长为 $\sqrt{5}$。如图,小长方形的长和宽分别

为2和1,以数字-1所在的点为圆心,小长方形的对角线长为半径画弧,与数轴在原点的右侧交于点P,则点P对应的数为$\sqrt{5}-1$,则点P即为所求。



第24题图

25 (1) (2, 3) 因为$4<(\sqrt{8})^2<9$,所以$2<\sqrt{8}<3$。 (2) $a=-1-\sqrt{3}$ 因为$1<\sqrt{3}<2$,所以$2<1+\sqrt{3}<3$,所以$m=2$,因为$m+a=1-\sqrt{3}$,所以$a=-1-\sqrt{3}$。

(3) $y=3$ 因为y是正整数,所以y越大,$\sqrt{y}$越大,$y+\sqrt{y}$越大。当$y=2$时,$y+\sqrt{y}=2+\sqrt{2}<4$;当$y=3$时,$4<y+\sqrt{y}=3+\sqrt{3}<5$;当$y=4$时,$y+\sqrt{y}=6$。因为$4<y+\sqrt{y}<5$,所以$y=3$。

第三周 实数与数轴 实数的绝对值和大小比较

1 C 2 C 3 A 4 C 5 C 6 B 7 $\sqrt{3}-12$ 8 $\pm\sqrt{7}$

9 2 [提示:根据数轴得:$a<b<0<c$,所以$a-b<0$, $b-c<0$, $c-a>0$, $ab-ac>0$,所以$\frac{a-b}{|a-b|}-\frac{b-c}{|b-c|}+\frac{c-a}{|c-a|}+\frac{ab-ac}{|ab-ac|}=-1+1+1+1=2$。]

10 3 11 $-2a-b$

12 45 [提示:因为$45^2=2025$, $46^2=2116$, $2025<2026<2116$,所以$\sqrt{2025}<\sqrt{2026}<\sqrt{2116}$,即$45<\sqrt{2026}<46$,所以$n=45$。]

13 7 [提示:因为$\sqrt{64}<\sqrt{65}<\sqrt{81}$,所以$8<\sqrt{65}<9$, $7<\sqrt{65}-1<8$,因为$n<\sqrt{65}-1<n+1$,所以$n=7$。]

14 $2-\sqrt{2}$或$2+\sqrt{2}$ [提示:因为点B到原点的距离为$\sqrt{2}$,所以点B表示的数是$\pm\sqrt{2}$,当点B在点A右侧时,因为点A表示的数为1,点B表示的数为$\sqrt{2}$,所以$AB=\sqrt{2}-1$,因为点B、C到点A的距离相等,所以$AC=AB=\sqrt{2}-1$,所以当点B表示的数是$\sqrt{2}$时,点C表示的数是$1-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}$;当点$B$在点$A$左侧时,因为点$A$表示的数为1,点$B$表示的数是$-\sqrt{2}$,所以$AB=1-(-\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$,所以$AB=AC=1+\sqrt{2}$,点$C$表示的数是$1+(1+\sqrt{2})=1+1+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$。综上可知,点$C$表示的数为$2-\sqrt{2}$或$2+\sqrt{2}$。]

15 (1) 3 (2) 2 [提示:(2) 因为a、b、n均为正整数,所以$n-1$, n, $n+1$为连续的三个自然数,而$n-1<\sqrt{a}<n$, $n<\sqrt{b}<n+1$,所以$\sqrt{(n-1)^2}<\sqrt{a}<\sqrt{n^2}$, $\sqrt{n^2}<\sqrt{b}<\sqrt{(n+1)^2}$,观察0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …,而$0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=$

25，$6^2=36$，$7^2=49$，$8^2=64$，$9^2=81$，…，所以$(n-1)^2$与n^2之间的整数有$(2n-2)$个，n^2与$(n+1)^2$之间的整数有$2n$个，所以满足条件的a的个数为$(2n-2)$个，满足条件的b的个数为$2n$个，因为$2n-(2n-2)=2$(个)，所以满足条件的a的个数总比b的个数少2个。]

16 4 [提示：当$x<-1$时，$y=-x-1+2-x+3-x=-3x+4$，此时$y>7$；当$-1\leqslant x<2$时，$y=1+x+2-x+3-x=-x+6$，此时$y>4$；当$2\leqslant x<3$时，$y=1+x+x-2+3-x=x+2$，此时$y\geqslant 4$；当$x\geqslant 3$时，$y=x+1+x-2+x-3=3x-4$，此时$y\geqslant 5$；综上可得，y的最小值为4。]

17 $a<b<c$

18 1024 [提示：因为a、b、c为整数，且满足$1000a+10\times\sqrt[3]{b}+c^2=2024$，所以$\sqrt[3]{b}$为整数。又因为$|b|<100$，所以$b=\pm1$或$\pm8$或$\pm27$或$\pm64$。因为$a>1$，所以$abc$的值要最大，则$b$、$c$同号，且绝对值尽可能大。当$b>0$，$c>0$时，则$a=2$，所以$10\times\sqrt[3]{b}+c^2=24$，所以$b=8$，$c=2$。此时$abc=2\times8\times2=32$；当$b<0$，$c<0$时，若$b=-1$，则$1000a+c^2=2034$。因为$c^2>0$，$a>1$，所以$a=2$，则$c^2=34$，显然解出的$c$不是整数，故不符合题意，舍去。若$b=-8$，则$1000a+c^2=2044$。又因为$a=2$，则$c^2=44$，显然解出的$c$不是整数，故不符合题意，舍去。若$b=-27$，则$1000a+c^2=2054$。又因为$a=2$，则$c^2=54$，显然解出的$c$不是整数，故不符合题意，舍去。若$b=-64$，则$1000a+c^2=2064$。又因为$a=2$，则$c^2=64$，所以$c=\pm8$。又因为$c<0$，所以$c=-8$，此时$abc=2\times(-64)\times(-8)=1024$。因为$1024>32$，所以$abc$的最大值为1024。故答案为1024。]

19 (1) $a=5$，$b=2$，$c=3$　(2) ±4

20 (1) 3　(2) 根据图示，可得$a<b<0<c$，且$|a|>|c|$，所以$-a>c$，所以$a+c<0$，所以$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt[3]{b^3}=-a+a+c+b=b+c$。

21 (1) 17.2，±17.8　(2) 17.3　(3) 171，1.77　(4) 4　(5) 因为$18^2=324<325$，$19^2=361$，所以$18<\sqrt{325}<19$，所以$\sqrt{325}$的整数部分为$m=18$，所以$\sqrt{3m-5}-(m-16)^3=\sqrt{3\times18-5}-(18-16)^3=-1$。

22 (1) 因为长方形内有两个相邻的正方形面积分别为10和4，所以两个正方形的边长分别是$\sqrt{10}$和2，所以阴影部分的宽为$(\sqrt{10}-2)$，所以阴影部分的面积为$2(\sqrt{10}-2)=2\sqrt{10}-4$。(2) 阴影部分的周长为$2(\sqrt{10}-2+2)=2\sqrt{10}$，因为$2\sqrt{10}=\sqrt{40}$，$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$，所以$6<2\sqrt{10}<7$，因为$40-36<49-40$，所以周长更接近6。

23 (1) 4；$-\sqrt{3}$　(2) 当$x=4$，$y=-\sqrt{3}$时，$\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\left(y+\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{4}}-\left(-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$。

24 (1) $\sqrt[3]{-8}=-2$　(2) 因为$\sqrt{2a-1}=3$，所以$2a-1=3^2=9$，所以$a=5$，因为$3a+b-1$

的平方根是 ± 4，所以 $3a+b-1=(\pm 4)^2=16$，所以 $b=2$，因为 c 是 $\sqrt{60}$ 的整数部分，$\sqrt{49}<\sqrt{60}<\sqrt{64}$，而 $\sqrt{49}=7$，$\sqrt{64}=8$，所以 $c=7$，所以 $a+2b+c=5+2\times 2+7=16$，所以 $a+2b+c$ 的算术平方根是 4。

25 (1) $x=\sqrt{3}-1$　(2) 4

26 (1) -20，-16，2

(2) ① 当点 B 与点 F 重合时，$-16+2t=10-6t$，所以 $t=\frac{13}{4}$；当点 A 与点 E 重合时，$-20+2t=8-6t$，所以 $t=\frac{7}{2}$。所以当正方形 $EFGH$ 在正方形 $ABCD$ 内部时，$\frac{13}{4}<t<\frac{7}{2}$；

② 当点 F 在 A 左侧时，$AE=(-20+2t)-(8-6t)=8t-28$，$AF=(-20+2t)-(10-6t)=8t-30$，因为 $S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AFD}$，所以 $AE=2AF$，所以 $8t-28=2(8t-30)$，所以 $t=4$；当点 F 在 A 右侧时，$AE=8t-28$，$AF=(10-6t)-(-20+2t)=30-8t$，所以 $8t-28=2(30-8t)$，所以 $t=\frac{11}{3}$。综上，$t=4$ 或 $\frac{11}{3}$ 时，$S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AFD}$。

第四周　实数的运算　科学记数法

1 D　**2** C　**3** C　**4** C　**5** A　**6** D　**7** 1.825×10^6　**8** 8　**9** 0　**10** 4

11 1　**12** $8\pm\sqrt{7}$　**13** $n=1$ 或 $n=81$　**14** 0　**15** (1) $\sqrt[3]{4}$　(2) 64

16 2　[提示：因为 m、n 是有理数，且 m、n 满足等式 $2m+n+\sqrt{2}(n-2)=\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)+21$，所以 $2m+n+\sqrt{2}(n-2)=23+3\sqrt{2}$，则 $2m+n=23$，$n-2=3$，解得 $n=5$，$m=9$，所以 $\sqrt{m}+n=\sqrt{9}+5=8$，所以 $\sqrt{m}+n$ 的立方根为 2。]

17 2.25×10^9

18 -6　[提示：因为 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$ 且 $a+b+c=0$，所以 $b+c=-a$，$a+c=-b$，$a+b=-c$，所以 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-3=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-3=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}-3=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}-3=-1-1-1-3=-6$。]

19 2.9918×10^{-26} kg　**20** (1) $\sqrt{5}+5$；(2) $x=6$ 或 -4

21 (1) 原式 $=-9-3-9-\frac{1}{2}=-21\frac{1}{2}$　(2) $x-y$ 的平方根为 ± 4

22 (1) 10^{12}(纳米)　(2) 9.46×10^{24}(纳米)　(3) 1.419×10^{26}(米)

23 (1) -2，3　(2) ± 3

24 因为 $A=\sqrt[m-n]{m+n+3}$ 是 $m+n+3$ 的算术平方根，$B=\sqrt[m-2n+3]{4m+6n-20}$ 是 $4m+6n-20$ 的立方根，所以 $\begin{cases}m-n=2,\\m-2n+3=3,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}m=4,\\n=2。\end{cases}$ 所以 $A=\sqrt[m-n]{m+n+3}=\sqrt{9}=3$，$B=$

华东师大版一课一练

$\sqrt{4m+6n-20}=\sqrt[3]{8}=2$，所以$\sqrt{A^2+8B}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$。

25 (1) $a=21$ (2) $a=m^2+5n^2$，$b=2mn$

(3) 因为$12\sqrt{2}=2\times3\times2\sqrt{2}$，所以$17-12\sqrt{2}=3^2-2\times3\times2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=(3-2\sqrt{2})^2$，所以$3-2\sqrt{2}$是$17-12\sqrt{2}$的一个完美平方根。

单元练习十九

1 A **2** B **3** A **4** B **5** D **6** C **7** $\sqrt{5}$ **8** 1 **9** ±2 **10** $c-a-b$

11 (1) 1.2；(2) $4\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **12** $\frac{11}{6}$或$-\frac{5}{6}$ **13** 7 **14** $7\sqrt{2}$或$-3\sqrt{2}$ **15** 1 **16** 1或-9

17 $4b-a$ [提示：$a<b<0<c$，$|b|<|c|$，则$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a+b)^2}-|b-c|+\sqrt[3]{b^3}=|a|+a+b+|c-a+b|+b-c+b=-a+a+b+c-a+b+b-c+b=4b-a$。]

18 6 [提示：因为$a+b+c=2\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}+6\sqrt{c-2}-14$，所以$a+1-2\sqrt{a+1}+1+b+1-4\sqrt{b+1}+4+c-2-6\sqrt{c-2}+9=0$，所以$(\sqrt{a+1}-1)^2+(\sqrt{b+1}-2)^2+(\sqrt{c-2}-3)^2=0$，所以$\sqrt{a+1}-1=0$，$\sqrt{b+1}-2=0$，$\sqrt{c-2}-3=0$，所以$a=0$，$b=3$，$c=11$。所以$\sqrt{ab+bc+ca+3}=\sqrt{0+33+0+3}=6$。]

19 (1) -0.01，0.1 729 000 000

(2) 当$a<-1$或$0<a<1$时，$\sqrt[3]{a}>a$；$-1<a<0$或$a>1$时，$\sqrt[3]{a}<a$；当$a=\pm1$或0时，$\sqrt[3]{a}=a$。

20 (1) 代数式$x+y$的平方根是$\pm\sqrt{5}$。

(2) $\sqrt{c^2}-\sqrt{(a-c)^2}+\sqrt[3]{(a-b)^3}-|b-c|=|c|-|a-c|+(a-b)+b-c=c+a-c+a-b+b-c=2a-c$。

21 (1) 由数轴，可得$b<-2$，$0<a<2$，所以$a+2>0$，$b-2<0$，$a-b>0$，所以$M=\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{(b-2)^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{b^2}=a+2-[-(b-2)]+a-b+(-b)=a+2+b-2+a-b-b=2a-b$。

(2) 当$a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{3}$时，原式$=2\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$。

22 (1) 4 (2) 11 (3) $-11\frac{5}{9}$ (4) $-\sqrt{3}$

23 (1) 5，$\sqrt{33}-5$ (2) 1 (3) $x-y$的相反数是$\sqrt{5}-8$

24 因为$(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2=8+2\sqrt{8}\times\sqrt{3}+3=11+2\sqrt{24}$，$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2=6+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}+5=11+2\sqrt{30}$，所以$11+2\sqrt{24}<11+2\sqrt{30}$，所以$(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2<(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2$，因为$\sqrt{8}+\sqrt{3}>0$，$\sqrt{6}+\sqrt{5}>0$，所以$\sqrt{8}+\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{5}$。

25 【任务1】-3、7、-6

【任务2】因为点 B 与点 C 重合，所以折痕处对应的数为 $\frac{-6+7}{2}=0.5$，所以与点 A 重合的点所表示的数为 $0.5+3.5=4$。

【任务3】因为 $BD=7$，点 B 表示的数为 7，所以点 D 表示的数为 0，因为点 Q 从点 D 出发，以 1 个单位长度/秒的速度“上坡”至终点 B，当一个点到达终点后，另一个点也立即停止运动，所以 $0\leqslant t\leqslant 7$。因为点 P 在“阶梯坡面”上运动，$CA=3$，点 P 从点 C 出发，以 3 个单位长度/秒的速度向点 A 运动，所以 $1\leqslant t\leqslant 7$。当 $1\leqslant t\leqslant 6$ 时，此时点 P、Q 都在做上坡运动。

① 当点 P 在点 Q 下方时，由题意得：$AD=0-(-3)=3$，所以 $AQ=AD+DQ=3+t$，$AP=2(t-1)$，所以 $PQ=AQ-AP=3+t-2(t-1)=-t+5$，因为 $2AQ=9PQ$，所以 $2(t+3)=9(-t+5)$，所以 $t=\frac{39}{11}$；

② 当点 P 在点 Q 上方时，由题意得：$AD=0-(-3)=3$，所以 $AQ=AD+DQ=3+t$，$AP=2(t-1)$，所以 $PQ=AP-AQ=2(t-1)-(t+3)=t-5$，因为 $2AQ=9PQ$，所以 $2(t+3)=9(t-5)$，所以 $t=\frac{51}{7}$（大于 6，不合题意舍去）。

当 $6<t\leqslant 7$ 时，此时点 P 在做下坡运动，点 Q 在做上坡运动，由题意得：$AQ=AD+DQ=3+t$，$BP=5(t-6)$，所以 $BQ=AB-AQ=10-(3+t)=7-t$。

① 当点 P 在点 Q 下方时，$PQ=BP-BQ=5(t-6)-(7-t)=6t-37$，因为 $2AQ=9PQ$，所以 $2(t+3)=9(6t-37)$，所以 $t=\frac{339}{52}$。

② 当点 P 在点 Q 上方时，$PQ=BQ-BP=(7-t)-5(t-6)=-6t+37$，因为 $2AQ=9PQ$，所以 $2(t+3)=9(-6t+37)$，所以 $t=\frac{327}{56}$（小于 6，不合题意舍去）。

综上，当点 P 在“阶梯坡面”上运动时，满足 $2AQ=9PQ$，t 的值为 $\frac{39}{11}$ 秒或 $\frac{339}{52}$ 秒。

第 20 章　二次根式

第五周　二次根式及其性质　最简二次根式

1 D　2 D　3 D　4 C　5 A　6 B　7 $x\leqslant\frac{2}{3}$　8 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 3$　9 $\frac{27}{16}$

10 $2c$　11 4　12 $3a+c$　13 2　14 ①③　15 27　16 $-\sqrt{-a-1}$

17 -14 或 -7 或 -2 或 5　[提示：因为设 $\sqrt{n^2+9n+30}=p$（p 为非负整数），则 $n^2+9n+30=p^2$，所以 $4n^2+36n+120=4p^2$，所以 $(2n+9)^2+39=4p^2$，所以 $(2p+2n+9)(2p-2n-$

$9)=39$，所以 $\begin{cases}2p+2n+9=1,\\2p-2n-9=39\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=39,\\2p-2n-9=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=3,\\2p-2n-9=13\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2p+2n+9=13,\\2p-2n-9=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=10,\\n=-14\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=10,\\n=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=4,\\n=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=4,\\n=-2,\end{cases}$ 所以 $n=-14$ 或 -7 或 -2 或 5。]

18 52 [提示：原式可变形为 $\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-6)^2}+|b+4|+|b-2|=10$，所以 $|a-2|+|a-6|+|b+4|+|b-2|=10$，所以 a 到 2 和 6 的距离之和是 4，b 到 -4 和 2 的距离之和是 6，所以 $2\leqslant a\leqslant 6$，$-4\leqslant b\leqslant 2$，所以 $|a|$ 的最大值为 6，$|b|$ 的最大值为 4，所以 $a^2+b^2=6^2+(-4)^2=36+16=52$。]

19 (1) 3　(2) 由题意可知：$|3-a|+|a-7|=4$，当 $a\leqslant 3$ 时，$3-a\geqslant 0$，$a-7<0$，所以原方程化为：$3-a-(a-7)=4$，所以 $a=3$，符合题意；当 $3<a<7$ 时，$3-a<0$，$a-7<0$，所以 $-(3-a)-(a-7)=4$，所以 $4=4$，故 $3<a<7$，符合题意；当 $a\geqslant 7$ 时，$3-a<0$，$a-7\geqslant 0$，所以 $-(3-a)+(a-7)=4$，所以 $a=7$，符合题意。综上所述，$3\leqslant a\leqslant 7$。

(3) 原方程可化为：$|a+1|+|a-5|=8$。当 $a\leqslant -1$ 时，$a+1\leqslant 0$，$a-5<0$，所以原方程化为：$-a-1-(a-5)=8$，所以 $a=-2$，符合题意；当 $-1<a<5$ 时，$a+1>0$，$a-5<0$，所以 $(a+1)-(a-5)=8$，此方程无解，故 $-1<a<5$，不符合题意；当 $a\geqslant 5$ 时，$a+1>0$，$a-5\geqslant 0$，所以 $a+1+a-5=8$，所以 $a=6$，符合题意。

综上所述，$a=-2$ 或 $a=6$。

20 $y=\sqrt{(x-4)^2}-x+5=|x-4|-x+5$，当 $x-4<0$ 时，$y=4-x-x+5=9-2x$，当 $x-4\geqslant 0$ 时，$y=x-4-x+5=1$；当 $x=1$ 时，$y=9-2=7$；当 $x=2$ 时，$y=9-4=5$；当 $x=3$ 时，$y=9-6=3$。所以当 x 分别取 1，2，3，…，2024 时，所对应的 y 值的总和是 $7+5+3+2021\times 1=2036$。

21 (1) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{2}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$。

(2) $2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=2\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=2(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2+3-2\sqrt{2}=1$。

22 a

23 由 $x-2026\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 2026$，则 $x-2025+\sqrt{x-2026}=x$，所以 $\sqrt{x-2026}=2025$，解得 $x=2025^2+2026$，则 $x-2025^2=2026$。

24 因为 $x-a\geqslant 0$ 且 $x\neq a$，所以 $x-a>0$。因为 $a(x-a)\geqslant 0$，所以 $a\geqslant 0$。当 $a>0$ 时，$\begin{cases}a(y-a)\geqslant 0,\\a-y\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $y=a$，与 y、a 互不相等矛盾，所以 $a=0$。此时，$\sqrt{x}-\sqrt{-y}=0$，解得 $x=-y$，即 $x+y=0$。所以 $\dfrac{x+y}{x-y}=0$。

第六周　二次根式的加法和减法

1 C　2 D　3 C　4 D　5 B

6 B ［提示：因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，又$\sqrt{a}=m+\frac{a-b}{2}$，$\sqrt{b}=n-\frac{a-b}{2}$，所以$m=\sqrt{a}-\frac{a-b}{2}=\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}=\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=\frac{1}{2}$，$n=\sqrt{b}+\frac{a-b}{2}=\sqrt{b}+\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}=\sqrt{b}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=\frac{1}{2}$，所以$mn=\frac{1}{4}$，$m^2+n^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$m+n=1$，$m-n=0$。］

7 2　8 $\sqrt{3}$　9 1　10 -6　11 5　12 $-a-b$　13 4，5

14 0 ［提示：因为$a<0$，所以$b<0$，则$\frac{1}{b}\sqrt{ab^3}-a\sqrt{\frac{b}{a}}=-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}=0$。］

15 2　16 $\pm2\sqrt{3}$ ［提示：因为$xy=3$，所以x、y同号，所以原式$=x\sqrt{\frac{xy}{x^2}}+y\sqrt{\frac{xy}{y^2}}=\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{xy}+\frac{y}{|y|}\sqrt{xy}$，当$x>0$，$y>0$时，原式$=\sqrt{xy}+\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$；当$x<0$，$y<0$时，原式$=-\sqrt{xy}+(-\sqrt{xy})=-2\sqrt{3}$。］

17 $-12\leqslant m\leqslant\frac{64}{3}$ ［提示：由$3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=16$，得$\sqrt{x}=\frac{16-4\sqrt{y}}{3}$，$16-4\sqrt{y}\geqslant0$，解得$\sqrt{y}\leqslant4$，又$\sqrt{y}\geqslant0$，所以$0\leqslant\sqrt{y}\leqslant4$。$m=4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\times\frac{16-4\sqrt{y}}{3}-3\sqrt{y}=\frac{64-25\sqrt{y}}{3}$，即$m=\frac{64-25\sqrt{y}}{3}$，当$\sqrt{y}=0$时，$m_{最大}=\frac{64}{3}$，当$\sqrt{y}=4$时，$m_{最小}=-12$。从而$m$的取值范围是$-12\leqslant m\leqslant\frac{64}{3}$。］

18 $-\sqrt{6}$ ［提示：设$\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}=x$，则$x^2=5-\sqrt{21}-2\sqrt{5-\sqrt{21}}\times\sqrt{5+\sqrt{21}}+5+\sqrt{21}=10-2\sqrt{4}=6$，所以$x=\pm\sqrt{6}$，因为$5-\sqrt{21}-(5+\sqrt{21})=-2\sqrt{21}<0$，所以$\sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}=-\sqrt{6}$。］

19 (1) $\sqrt{2}$　(2) 1　20 $\sqrt{-2b}$

21 (1) 不正确　(2) 因为$\sqrt{16(2m+n)}=4\sqrt{2m+n}$，$\sqrt{16(2m+n)}$和$\sqrt[m-n+1]{m+7}$可以合并，所以$\begin{cases}m-n+1=2,\\2m+n=m+7,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=4,\\n=3,\end{cases}$经检验$m=4$，$n=3$符合题意，所以$m=4$，$n=3$。

22 因为$\sqrt{x-2}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$，所以$\begin{cases}x-2=0,\\y-\frac{1}{2}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$所以原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$。

23 因为 $\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{5}$，所以 $\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2=(\sqrt{5})^2$，所以 $x+\frac{1}{x}=3$。所以 $x+\frac{1}{x}+1=4$，$x+\frac{1}{x}-1=2$，即 $\frac{x^2+x+1}{x}=4$，$\frac{x^2-x+1}{x}=2$。所以 $\sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^2-x+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$。

24 因为 m、n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，所以 $\sqrt{5}m+2m+3n-2\sqrt{5}n=-7$，则 $\sqrt{5}(m-2n)+2m+3n=-7$，从而 $\begin{cases}m-2n=0,\\2m+3n=-7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-1,\\m=-2。\end{cases}$

25 (1) 因为 $a+b=-8$，所以 $(a+b)^2=64$，即 $a^2+2ab+b^2=64$。又因为 $ab=12$，所以 $a^2+24+b^2=64$，则 $a^2+b^2=40$。

(2) 因为 $a+b=-8<0$，$ab=12>0$，所以 $a<0$，$b<0$。原式 $=-\frac{\sqrt{ab}}{a}-\frac{\sqrt{ab}}{b}=-\left(\frac{b\sqrt{ab}}{ab}+\frac{a\sqrt{ab}}{ab}\right)=-\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{ab}=-\frac{\sqrt{12}\times(-8)}{12}=\frac{2\sqrt{3}\times 8}{12}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。

26 -1 [提示：设 $x=\sqrt{m}$，$y=\sqrt{n}$，则 $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$，$x^2+(4y-2)x+(4y^2-4y-3)=0$，$x^2+(4y-2)x+(2y-3)(2y+1)=0$，因式分解，得 $(x+2y-3)(x+2y+1)=0$。所以 $\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$ 或 -1（舍负），所以 $\frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2}=-1$。]

第七周　二次根式的乘法和除法

1 C　2 B　3 D　4 C　5 C　6 B

7 $-2y$　8 $6\sqrt{a}$　9 2　10 $\pm 3\sqrt{6}a$　11 $-a^2+\frac{1}{a^2}$　[提示：因为 $-1<a<0$，所以 $a+\frac{1}{a}<0$，$a-\frac{1}{a}>0$，所以 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}\cdot\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left[-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]=-a^2+\frac{1}{a^2}$。]

12 4555 [提示：设 $68=a$，则 $66=a-2$，$67=a-1$，$69=a+1$，所以 $66\times67\times68\times69+1=(a-2)(a-1)\times a\times(a+1)+1=(a-2)(a+1)\times a(a-1)+1=(a^2-a-2)(a^2-a)+1=(a^2-a)^2-2(a^2-a)+1=(a^2-a-1)^2$，所以 $\sqrt{66\times67\times68\times69+1}=\sqrt{(a^2-a-1)^2}=|a^2-a-1|$。因为 $a=68$，所以 $|a^2-a-1|=68^2-68-1=4555$，所以 $\sqrt{66\times67\times68\times69+1}=4555$。]

13 1或4或16　**14** $2+\sqrt{2}$　**15** 24　**16** $\sqrt{ab}-cd$　**17** 10，351　**18** $2\sqrt{15}$

19 $-a^2\sqrt{a}$　**20** $6\sqrt{2}$　**21** (1) 2　(2) 22　**22** $\frac{\sqrt{6}}{2}+1$　**23** $2\sqrt{a}-3\sqrt{b}=-2\sqrt{2}$

24 (1) 因为 $x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，所以 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$，$y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$，所以 $x+y=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$，$xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$，所以 $x^2+y^2+xy=(x^2+y^2+2xy)-xy=(x+y)^2-xy=4^2-1=15$。

(2) 因为 $x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，且 $1<\sqrt{3}<2$，所以 $0<x<1$，$3<y<4$，所以 $a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}-1$，所以 $(a+b)^2+\sqrt{(a-b)^2}=(2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1)^2+\sqrt{(2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2}=1+2\sqrt{3}-3=2\sqrt{3}-2$。

25 因为 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，所以 $x-4\sqrt{xy}-5y=0$，所以 $(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$。因为 $x>0$，$y>0$，所以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$，所以 $\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$，即 $\sqrt{x}=5\sqrt{y}$。所以 $\frac{x-3\sqrt{xy}+2y}{x+\sqrt{xy}-6y}=\frac{25y-15y+2y}{25y+5y-6y}=\frac{1}{2}$。

第八周　二次根式的混合运算

1 C　**2** D　**3** D　**4** A　**5** B　**6** C　**7** $2\sqrt{7}$ 或 $2\sqrt{3}$　**8** $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$　**9** $\frac{12}{7}$

10 3　**11** -4　**12** $\frac{5}{8}$　**13** -9

14 $3-2\sqrt{2}$ 或 $-3-2\sqrt{2}$　[提示：因为 $m+2\sqrt{2}$ 是整数，所以 $m=a-2\sqrt{2}$（其中 a 为整数），所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{a-2\sqrt{2}}=\frac{a+2\sqrt{2}}{a^2-8}$，又因为 $\frac{1}{m}-2\sqrt{2}$ 是整数，所以 $a^2-8=1$，所以 $a=\pm3$，所以 $m=3-2\sqrt{2}$ 或 $m=-3-2\sqrt{2}$。]

15 $-\frac{185}{9}$

16 ±4　[提示：因为 $\sqrt{(x-100)^2}+(\sqrt{96-x})^2=200$，所以 $96-x\geqslant0$，所以 $x\leqslant96$，所以 $100-x+96-x=200$，解得 $x=-2$。因为 $y=\sqrt{m+23}+\sqrt{m-2}-\sqrt{2-m}$，所以 $m+23\geqslant0$，$m-2\geqslant0$，$2-m\geqslant0$，解得 $m=2$，所以 $y=5$，所以 $\pm\sqrt{2y-3x}=\pm\sqrt{2\times5-3\times(-2)}=\pm4$。]

17 2025　[提示：$\sqrt{1012^2+1012\times2026+1013^2}=\sqrt{1012^2+2\times1012\times1013+1013^2}=\sqrt{(1012+1013)^2}=\sqrt{2025^2}=2025$。]

18 (1) $a^2+a-1=0$ (2) 2023 [提示：因为$a^2+a-1=0$，所以$a^2=-a+1$，所以$a^3=a(-a+1)=-a^2+a=-(-a+1)+a=2a-1$，所以$a^3-2a+2024=2a-1-2a+2024=2023$。]

19 (1) $-2\sqrt{2}$ (2) 2 (3) $\frac{11}{6}-2\sqrt{2}$ (4) $1+2\sqrt{6}$

20 (1) $ab=-1$，$a^2+b^2=3$

(2) 因为$a^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，所以$a^4=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$，所以$a^5=\frac{(7+3\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{4}=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$。因为$\sqrt{5}\approx 2.236$，所以$a^5>\frac{11+5\times 2.2}{2}=11$，$a^5<\frac{11+5\times 2.3}{2}<12$。因此，不超过$a^5$的最大整数为11。

21 (1) 11 (2) $1-7\sqrt{3}$

22 (1) $m=2\sqrt{3}$ (2) $(2-\sqrt{2})(4+\sqrt{2}m)=4$，整理得$(2\sqrt{2}-2)m=4\sqrt{2}-4$，所以$m=2$。

23 $x=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$，$y=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$，所以$x+y=4n+2$，$xy=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2=[(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]^2=1$。将$xy=1$代入方程，化简得：$x^2+y^2=98$，所以$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=98+2\times 1=100$，所以$x+y=10$。所以$4n+2=10$，解得$n=2$。

24 $2\sqrt{3}-b=(\sqrt{3}+1)(3-a\sqrt{3})$，$3a-b+a\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，$\begin{cases}3a-b=3,\\a=1,\end{cases}$所以$a=1$，$b=0$。

25 原式$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{\sqrt{5}(\sqrt{7}+3)+\sqrt{7}(3+\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{1}{3+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

单元练习二十

1 B 2 B 3 C 4 B 5 D 6 C

7 $x\leqslant 1$ 8 $2\sqrt{2}$ -3 9 5 10 -8 11 $m\geqslant 3$ 12 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

13 6 14 $-4\sqrt{3}-8$ 15 $1-\sqrt{3}$ 16 $3\sqrt{3}-3$ 17 2 18 $\pm 2\sqrt{2}$

19 $\frac{35}{6}$ 20 $-9x^2y\sqrt{x}$ 21 原式$=\sqrt{5}$ 22 1 23 $x<6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

24 $a=5+2\sqrt{6}$，$b=5-2\sqrt{6}$，所以，原式$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{10}{4\sqrt{6}}=\frac{5}{12}\sqrt{6}$。

25 $\sqrt{5}$

26 (1) m^2+3n^2　$2mn$　(2) 4　2　1　1　(3) 由题意，得 $a=m^2+3n^2$，$4=2mn$。因为 $4=2mn$，且 m、n 为正整数，所以 $m=2$，$n=1$ 或者 $m=1$，$n=2$，所以 $a=2^2+3\times1^2=7$，或 $a=1^2+3\times2^2=13$。

第21章　一元二次方程

第九周　一元二次方程的解法

1 C　**2** B　**3** A　**4** A　**5** B　**6** B

7 $\neq\pm2$　$=-2$　**8** $a\neq0$，$c=0$　**9** 4　**10** $\frac{1}{3}$或 1

11 $x_1=6$，$x_2=-1$　$x=1\pm\sqrt{2}$　**12** $x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=-2$　**13** $x_1=-6$，$x_2=16$

14 $\frac{1}{2}$　**15** 3　**16** $\frac{53}{16}$　**17** 1　**18** $-\frac{7}{8}$　[提示：因为 $2a^2+a=\frac{2}{b}+\frac{1}{\sqrt{b}}=1$，所以 $2a^2+a=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{b}}=1$，解得 $a=-1$，$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{2}$。所以 $\frac{a^3b\sqrt{b}+1}{b\sqrt{b}}=a^3+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3=(-1)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{7}{8}$。]

19 (1) $x_1=-9$，$x_2=8$　(2) $y=-3\pm\sqrt{2}$　(3) $x=\frac{-2\pm3\sqrt{2}}{2}$　(4) $x_1=-8$，$x_2=0$　(5) $x_1=-1$，$x_2=\frac{7}{5}$　(6) $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{3}$，$x_3=\frac{1}{6}$，$x_4=1$

20 因为 $(x-y)(x+4y)=0$，所以，当 $x-y=0$ 时，$\frac{x-y}{x+y}=0$；当 $x+4y=0$ 时，$x=-4y$，从而 $\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{3}$。

21 把 $x=1$ 代入方程得 $2a+3+a^2+2a=0$，解得 $a_1=-3$，$a_2=-1$。当 $a_1=-3$ 时，另一个实数根为 2；当 $a_2=-1$ 时，另一个实数根为 -2。

22 由题意，得 $a=\sqrt{5}+1$，所以 $a^3-2a^2-4a=a(a^2-2a-4)=a(a^2-2a+1-5)=a[(a-1)^2-5]=a[(\sqrt{5}+1-1)^2-5]=0$。

23 解方程 $x^2-10x+21=0$ 得 $x_1=3$，$x_2=7$，因为 $3<$ 第三边的边长 <9，所以第三边的边长为 7。所以这个三角形的周长是 $3+6+7=16$。

24 解方程 $(2026x)^2-2027\times2025x-1=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2026^2}$，所以 $\alpha=1$。解方程 $x^2+2024x-2025=0$，得 $x_1=-2025$，$x_2=1$，所以 $\beta=-2025$，因此 $\alpha-\beta=1-(-2025)=2026$。

第十周　一元二次方程的判别式

1 A　2 B　3 A　4 A　5 B　6 A

7 $x^2+2x-1=0$　1　2　-1　8 2　$\sqrt{2}$　±1　$\pm\frac{1}{2}$　9 有两个不相等的实数根

10 3　11 $-2\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$　12 $-\frac{8}{3}$　13 0　有两个相等的实数根

14 0　15 -1或2　16 $m\leqslant\frac{1}{5}$且$m\neq0$　17 $m>-2$　18 19　19 (1) $x_1=-3$，$x_2=5$　(2) $x=-1\pm\frac{\sqrt{33}}{3}$　(3) $x_1=1$，$x_2=5$　(4) $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=1$　(5) 原方程可因式分解为$(x-2)(x-3a-1)=0$，解得$x_1=2$，$x_2=3a+1$。

20 (1) 由题意知$m-1\neq0$，$\Delta=-8m+12\geqslant0$，得$m\leqslant\frac{3}{2}$且$m\neq1$。　(2) $m=\frac{3}{2}$，$x_1=x_2=-3$。

21 因为方程有实根，所以$\Delta=[2(1+a)]^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)=4[-(a-1)^2-(a+2b)^2]\geqslant0$，即$(a-1)^2+(a+2b)^2\leqslant0$，所以只有$(a-1)^2=0$和$(a+2b)^2=0$，因此$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$。

22 由题意，可得$\Delta=16b^2-8c=0$。因为$b+c=0$，所以$b_1=0$，$c_1=0$，或$b_2=-\frac{1}{2}$，$c_2=\frac{1}{2}$。当$b=0$，$c=0$时，$x_1=x_2=0$；当$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$时，$x_1=x_2=\frac{1}{2}$。

23 (1) 由已知得$\Delta=24p^2-100q=0$，即$q=\frac{6}{25}p^2$，则方程$x^2+px+q=0$的判别式$\Delta=p^2-4q=\frac{1}{25}p^2$，而$p\neq0$，所以$\Delta>0$，因此，方程$x^2+px+q=0$有两个不相等的实数根。

(2) 解得方程$x^2+px+q=0$的根为$x=\frac{-p\pm\frac{1}{5}p}{2}$，又$|x_1|<|x_2|$，则$x_1=-\frac{2}{5}p$，$x_2=-\frac{3}{5}p$，所以$\frac{x_1}{x_2}=\frac{2}{3}$。

24 (1) 因为$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{b}x+c-\frac{1}{2}a=0$有两个相等的实数根，所以$\Delta=(\sqrt{b})^2-4\times\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{2}a\right)=0$，整理得$a+b-2c=0$，又因为$3cx+2b=2a$的根为$x=0$，所以$a=b$，代入$a+b-2c=0$得$a=c$，所以$a=b=c$，即$\triangle ABC$为等边三角形。　(2) 由(1)知$\triangle ABC$为等边三角形，所以$a=b$，因为$a$、$b$是方程$x^2+mx-3m=0$的两个根，所以$\Delta=m^2-4\times(-3m)=$

0，即 $m^2+12m=0$，所以 $m_1=0$，$m_2=-12$。当 $m=0$ 时，原方程的解为 $x=0$（不符合题意，舍去），所以 $m=-12$。

第十一周　一元二次方程的根与系数关系

1 B　2 D　3 B　4 C　5 A　6 C

7 2　8 $\frac{3}{2}$　9 2022　10 -3　11 4　12 (1) 是　(2) $-\frac{9}{7}$ 或 0　[提示：因为 $ax^2-(3a+b)x+3b=0(a\neq0)$，所以 $(x-3)(ax-b)=0$，所以 $x-3=0$，$ax-b=0$，解方程 $ax^2-(3a+b)x+3b=0(a\neq0)$ 得 $x_1=3$，$x_2=\frac{b}{a}$。因为 $ax^2-(3a+b)x+3b=0(a\neq0)$ 是"2倍根方程"，所以 $\frac{b}{a}=2\times3=6$ 或 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$，所以 $b=6a$ 或 $b=\frac{3}{2}a$，所以 $\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{3a-2\times6a}{a+6a}=-\frac{9}{7}$ 或 $\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{3a-2\times\frac{3}{2}a}{a+\frac{3}{2}a}=0$。]

13 -2，16　[提示：$ax^2+(3a-2)x+2(a-2)=0$，方程可变为：$(ax+a-2)(x+2)=0$，所以 $ax+a-2=0$ 或 $x+2=0$，解得 $x=\frac{2}{a}-1$，$x=-2$。因为 $a>0$，所以 $\frac{2}{a}-1>-1$，因为 $x_1>x_2$，所以 $x_1=\frac{2}{a}-1$，$x_2=-2$；

因为 $\sqrt{ax_1-x_2}+\sqrt{ax_2-bx_1}=0$，所以 $\sqrt{a\left(\frac{2}{a}-1\right)-(-2)}+\sqrt{-2a-b\left(\frac{2}{a}-1\right)}=0$，

所以 $\sqrt{4-a}+\sqrt{-2a-b\left(\frac{2}{a}-1\right)}=0$，所以 $\begin{cases}4-a=0,\\-2a-b\left(\frac{2}{a}-1\right)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=16。\end{cases}$]

14 $-\frac{1}{3}$　[提示：因为实数 α，β 满足 $3\alpha^2+5\alpha-1=0$，$\beta^2-5\beta-3=0$ 且 $\alpha\beta\neq1$，所以 α、$\frac{1}{\beta}$ 是方程 $3x^2+5x-1=0$ 的两个根，所以 $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{1}{3}$。]

15 2　[提示：由题意可得 $\begin{cases}\Delta>0,\\m\neq0,\end{cases}$ 解得 $m>-1$ 且 $m\neq0$。因为 $x_1+x_2=\frac{2(m+2)}{m}=2m$，所以 $m^2-m-2=0$，解得 $m=2$ 或 -1。因为 $m>-1$，所以 $m=2$。]

16 -200　[提示：设 $a+99=m$，$b+100=n$，则 $a=m-99$，$b=n-100$，所以 $a+b=m-99+n-100=m+n-199$，由题意可知，$m(m+1)=1$，$n(n+1)=1$，所以 m、n 为方程 $x(x+1)=1$ 的两个实数根。由 $x(x+1)=1$，整理得 $x^2+x-1=0$，所以 $m+n=-\frac{1}{1}=-1$，所以 $m+n-199=-1-199=-200$，所以 $a+b$ 的值为 -200。]

17 $\frac{86}{7}$ [提示：由题意得 $(x+2)*3=0$，即为 $(x+2)^2+6(x+2)-9=0$，化简得 $x^2+10x+7=0$。因为 m、n 是该方程的两根，所以 $m+n=-10$，$mn=7$，所以 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=\frac{100-14}{7}=\frac{86}{7}$。]

18 9 [提示：因为关于 x 的方程 $x^2-2x-m+1=0$ 的两个实数根分别为 α、β，所以 $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-m+1$，因为 $|\alpha|+|\beta|=6$，所以 α、β 异号，即 $\alpha\beta<0$。由 $\alpha+\beta=2$，得 $\alpha^2+\beta^2=4-2\alpha\beta$。由 $|\alpha|+|\beta|=6$，得 $\alpha^2+\beta^2=36-2|\alpha\beta|$，所以 $4-2\alpha\beta=36-2|\alpha\beta|=36+2\alpha\beta$，所以 $\alpha\beta=-8$，所以 $-m+1=-8$，所以 $m=9$。]

19 (1) $k\leqslant 1$　(2) 存在，$k=-\frac{1}{2}$

20 因为 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，所以 $\alpha+\beta=1$，$\beta=1-\alpha$，所以 $\alpha^2-\alpha-1=0$，所以 $\alpha^2=\alpha+1$，所以 $\alpha^4=(\alpha^2)^2=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1=\alpha+1+2\alpha+1=3\alpha+2$，所以 $\alpha^4+3\beta=3\alpha+2+3(1-\alpha)=3\alpha+2+3-3\alpha=2+3=5$。

21 (1) $m\geqslant-\frac{1}{12}$　(2) 因为方程两实数根分别为 x_1、x_2，所以 $x_1+x_2=2m+3$，$x_1x_2=m^2+2$。因为 $x_1^2+x_2^2=19$，所以 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=19$，所以 $(2m+3)^2-2(m^2+2)=19$，整理得 $m^2+6m-7=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-7$。由(1)知，$m\geqslant-\frac{1}{12}$，所以 $m=1$。

22 (1) 略　(2) 因为 $x_1+x_2=8+k$，$x_1\cdot x_2=8k$，$x_1^2+x_2^2=68$，$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2$，所以 $(8+k)^2=68+16k$，解得 $k=\pm2$　(3) 解方程 $x^2-(8+k)x+8k=0$，得 $x_1=k$，$x_2=8$。① 当腰长为 5 时，则 $k=5$，因为 $5+5>8$，周长 $=8+5+5=18$；② 当底边为 5 时，$k=8$，因为 $5+8>8$，所以周长 $=5+8+8=21$。

23 (1) $k=0$　(2) $x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$

24 把方程 $t^2+99t+19=0$ 转化为 $19\frac{1}{t^2}+99\frac{1}{t}+1=0$，所以 s 和 $\frac{1}{t}$ 是方程 $19x^2+99x+1=0$ 的两个根，所以 $s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19}$，$s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{19}$，$\frac{st+4s+1}{t}=s+\frac{1}{t}+\frac{4s}{t}=-\frac{99}{19}+\frac{4}{19}=-\frac{95}{19}=-5$。

25 (1) 设所求方程的根是 y，则 $y=-x$，所以 $x=-y$。把 $x=-y$ 代入 $x^2+x-2=0$，得 $y^2-y-2=0$，故答案为：$y^2-y-2=0$。

(2) 设所求方程的根是 y，则 $y=\frac{1}{x}$，所以 $x=\frac{1}{y}$，把 $x=\frac{1}{y}$ 代入方程 $2x^2-7x+3=0$，得 $2\left(\frac{1}{y}\right)^2-7\cdot\frac{1}{y}+3=0$，化简，得 $3y^2-7y+2=0$。

(3) 一元二次方程整理后可得：$a(y-1)^2+b(y-1)+c=0$。令 $y-1=x$，所以 $y=x+1$，则方程 $a(y-1)^2+b(y-1)+c=0$ 的两根比 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 两根大 1，所以方程

$a(y-1)^2+b(y-1)+c=0$ 的两根分别是 4、-1。

第十二周　一元二次方程的应用

1 C　2 B　3 B　4 B　5 D　6 C

7 $p\geqslant -1$ 且 $p\neq 0$　8 $\pm 2,\pm 7$　9 ± 20　10 -2　11 $k\geqslant -\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 2$

12 20%　13 3 和 6　14 $-3\left(a-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$

15 $3200(1-x)^2=2500$　16 6、8、10 或 -6、-8、-10　17 13　18 $\frac{25}{2}$

19 (1) 原式 $=(x-4y)(2x+y)$。

(2) 原式 $=(x^2-5x+6)(x^2-5x-4)=(x-2)(x-3)\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)$。

20 (1) 设剪成两段后其中一段为 x cm，则另一段为 $(40-x)$ cm。由题意得：$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2=52$，解得 $x_1=16$，$x_2=24$。当 $x_1=16$ 时，$40-x=24$；当 $x_2=24$ 时，$40-x=16$，即两段的长度分别为 16 cm 和 24 cm。　(2) 不能。理由：$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2=48$，整理得 $x^2-40x+416=0$，因为 $\Delta=b^2-4ac=-64<0$，所以此方程无解，即不能剪成两段使得面积和为 48 cm^2。

21 设 AB 的长度为 x 米，则 BC 的长度为 $(100-4x)$ 米。根据题意得 $(100-4x)x=400$，解得 $x_1=20$，$x_2=5$，则 $100-4x=20$ 或 $100-4x=80$。因为当 $x=5$ 时，$BC=80$，$80>25$，所以 $x_2=5$ 舍去。即 $AB=20$，$BC=20$。答：花坛的边长 AB、BC 分别是 20 米、20 米。

22 设共有 n 个选手参加比赛，每个选手都要与 $(n-1)$ 个选手比赛一局，共计 $n(n-1)$ 局，但两个选手的对局从每个选手的角度各自统计了一次，因此实际比赛总局数应为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 局。由于每局共计 2 分，所以全部选手得分总共为 $n(n-1)$ 分。显然 $n-1$ 与 n 为相邻的自然数，容易验证，相邻两自然数乘积的末位数字只能是 0、2、6，故总分不可能是 1979、1984、1985，因此总分只能是 1980，于是 $n(n-1)=1980$，得 $n^2-n-1980=0$，解得 $n_1=45$，$n_2=-44$（舍去）。答：参加比赛的选手共有 45 人。

23 (1) 设每件衬衫应降价 x 元，则可列方程 $(40-x)(20+2x)=1200$，解得 $x_1=10$，$x_2=20$，即要使商场平均每天赢利 1200 元，则每件衬衫应降价 10 元或 20 元。　(2) 设每件衬衫降价 x 元，则所得赢利为 $(40-x)(20+2x)=-2(x-15)^2+1250$，所以，当每件衬衫降价 15 元时，商场赢利最多，为 1250 元。

24 由题意得 $x^2-(2k+1)(x-2)-4=0$，即 $x^2-(2k+1)x+4k-2=0$，且 a、b 为此方

程的解。当 $a=c=4$ 时，代入方程得 $-4k+10=0$，即 $k=\frac{5}{2}$，代入解得另一根为2，故周长为10；当 $b=c=4$ 时，同理周长为10；当 $a=b$ 时，则 $\Delta=(2k-3)^2=0$，即 $k=\frac{3}{2}$，从而 $x_1=x_2=2$，应舍去。所以这个三角形的周长为10。

25 假设存在实数 m，使这两个方程有且只有一个公共实数根 a，由方程根的定义，得 $\begin{cases} a^2+ma+2=0, & ① \\ a^2+2a+m=0, & ② \end{cases}$ 由①－②得 $(m-2)a+(2-m)=0$，解得 $m=2$ 或 $a=1$。当 $m=2$ 时，两个已知方程为同一方程，且没有实数根，所以 $m=2$ 舍去；当 $a=1$ 时，代入①得 $m=-3$，当 $m=-3$ 时，求得第一个方程的根为 $x_1=1$，$x_2=2$，第二个方程的根为 $x_1'=1$，$x_2'=-3$，所以，存在符合条件的 m，即 $m=-3$ 时，两个方程有且只有一个公共根 $x=1$。

第十三周　分式方程及其应用

1 D　2 A　3 B　4 D　5 D　6 D

7 $x=\frac{1}{3}$　8 $y^2+7y+10=0$　9 -2 或1　10 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$　11 -2　12 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 $-\frac{1}{7}$　14 6　15 3　2　16 2.2　17 $\frac{1}{8}$　18 $x_1=n+3$，$x_2=n+4$

19 $x=1$。

20 设 $1+\frac{9}{x}=t$，则原方程可化为 $3t^2+t-2=0$，解得 $t_1=\frac{2}{3}$，$t_2=-1$。当 $t=\frac{2}{3}$ 时，$1+\frac{9}{x}=\frac{2}{3}$，解得 $x_1=-27$；当 $t=-1$ 时，$1+\frac{9}{x}=-1$，解得 $x_2=-\frac{9}{2}$。经检验，$x_1=-27$，$x_2=-\frac{9}{2}$ 都是原方程的解。

21 设 $x+\frac{1}{x}=A$，则原方程可化为 $A^2+2A-8=0$，解得 $A=2$ 或 $A=-4$。当 $A=2$ 时，$x+\frac{1}{x}=2$，解得 $x_1=x_2=1$；当 $A=-4$ 时，$x+\frac{1}{x}=-4$，解得 $x_3=\sqrt{3}-2$，$x_4=-\sqrt{3}-2$。经检验 $x_1=x_2=1$，$x_3=\sqrt{3}-2$，$x_4=-\sqrt{3}-2$ 都是原方程的解。

22 原方程可化为 $3(x+2)+ax=3(x-2)$，可得 $ax=-12$。当 $a=0$ 时，方程无解，符合题意；当 $x=\pm2$，即 $a=\pm6$ 时，分母为0，无意义，方程无解。综上所述，$a=0$ 或 ±6。

23 设 $y=x^2+2x+1$，则 $\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}=\frac{3}{2}$，$2(y+1)+2y=3y(y+1)$，即 $3y^2-y-2=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=-\frac{2}{3}$。当 $x^2+2x+1=1$ 时，解得 $x_1=0$，$x_2=-2$；当 $x^2+2x+1=-\frac{2}{3}$ 时，$(x+1)^2=-\frac{2}{3}$，无实数解。经检验，$x_1=0$，$x_2=-2$ 都为原方程的解。

24 设该品牌饮料一箱有 x 瓶，由题意可列方程 $\frac{26}{x}-\frac{26}{x+3}=0.6$，解得 $x_1=-13$（不合题意，舍去），$x_2=10$，即该品牌饮料一箱有 10 瓶。

25 原方程化为 $(a+1)(b+1)x(x-2)+(a-1)(b-1)x(x+2)=2ab(x^2-4)$，即 $(ab+a+b+1)x^2-2(ab+a+b+1)x+(ab-a-b+1)x^2+2(ab-a-b+1)x=2abx^2-8ab$，即 $2x^2-4(a+b)x+8ab=0$，化简得 $x^2-2(a+b)x+4ab=0$，即 $(x-2a)(x-2b)=0$，解得 $x_1=2a$，$x_2=2b$。因为原方程无解，且 $a\neq b$，$ab\neq 0$，所以 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=1。\end{cases}$ 当 $\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$ 时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-2$；当 $\begin{cases}a=-1,\\b=1\end{cases}$ 时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-2$。所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值为 -2。

单元练习二十一

1 B **2** A **3** A **4** D **5** B **6** B

7 $4x^2-3x-9=0$，-3 **8** 2 **9** $m<-4$ **10** 4

11 $m\geqslant\frac{3}{2}$ 且 $m\neq 2$ **12** $3\left(x-\frac{3y+\sqrt{3}y}{3}\right)\left(x-\frac{3y-\sqrt{3}y}{3}\right)$ **13** 1 cm

14 2 **15** 10 **16** 5 **17** -1 或 $\frac{1}{2}$ **18** 6

19 (1) $x_1=-6$，$x_2=\frac{2}{5}$ (2) $x_1=1$，$x_2=-4$ (3) $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

(4) $x_1=6$，$x_2=9$ (5) $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=2$ (6) $x_1=0$，$x_2=1$

20 (1) 原式 $=-4\left(y-\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(y-\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$。

(2) 原式 $=(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$。

21 设门票降 x 元，原来人数 y 人，则 $16y\left(1+\frac{1}{5}\right)=(16-x)\cdot y(1+60\%)$，解得 $x=4$，即门票比原来降价 4 元。

22 这块铁片的长为 40 cm，宽为 20 cm。

23 (1) 由题意得 $20+(80-a)\times\frac{a}{100}=35$，整理，得 $a^2-80a+1500=0$，解得 $a=30$ 或 $a=50$。又因为 4 月份的用电量为 45 千瓦时，电费为 20 元，所以 a 的值大于 45，所以 a 的值为 50。

(2) 若交电费 45 元，设当月用电量为 x 千瓦时，则 $20+(x-50)\times\frac{50}{100}=45$，解得 $x=100$。因此，该宿舍 5 月份用电量为 100 千瓦时。

24 (1) $BH=CK$，证明略。　(2) $BH=1$ 或 3。

25 (任务 1)设 2 月和 3 月这两个月中，该景区游客人数平均每月增长率为 x。根据题意得 $4(1+x)^2=5.76$，解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$(不符合题意，舍去)。所以 2 月和 3 月这两个月中，该景区游客人数平均每月增长 20%。

(任务 2)总收入为 $100\times(20000-600\times10)+80\times(30000-400\times10)+(160-10)\times(20000+600\times10+400\times10)=7980000$(元)。所以景区 5 月份的门票总收入 798 万元。

(任务 3)设丙种门票价格下降 y 元时，景区 5 月份的门票总收入有 816 万元，根据题意得 $100\times(20000-600y)+80\times(30000-400y)+(160-y)\times(20000+600y+400y)=8160000$，整理得 $y^2-48y+560=0$，解得 $y_1=20$，$y_2=28$。所以丙种门票价格要下降 20 元或 28 元。

第 22 章　直角三角形

第十四周　直角三角形的性质　直角三角形全等的判定

1 B　**2** B　**3** C　**4** A　**5** B　**6** C

7 36　**8** 20　**9** 30°　**10** 3 厘米　**11** 12　**12** 100

13 15　**14** 60°　**15** 8　**16** 30°或 150°或 120°　**17** 4　**18** 55°

19 (1) 因为 $BE\perp AC$，所以 $\angle BEC=\angle BEA=90°$。因为 BE 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle EBC=\angle EBA$。在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle BEA$ 中，因为 $\begin{cases}\angle EBC=\angle EBA,\\ BE=BE,\\ \angle BEC=\angle BEA,\end{cases}$ 所以 $\triangle BEC\cong\triangle BEA$(ASA)，所以 $AE=EC$。

(2) 因为 $CD\perp AB$，所以 $\angle CDB=\angle CDA=90°$。因为 $\angle FBD+\angle A=90°$，$\angle DCA+\angle A=90°$，所以 $\angle FBD=\angle DCA$。在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDA$ 中，因为 $\begin{cases}\angle BDF=\angle CDA,\\ BD=CD,\\ \angle FBD=\angle ACD,\end{cases}$ 所以 $\triangle BDF\cong\triangle CDA$(ASA)，所以 $BF=AC$。又因为 $AC=2CE$，所以 $BF=2CE$。

20 $\angle BAC=120°$。提示：先求得 $\angle C=30°$。

21 连接 MC、MA，因为 $\angle DAB=\angle DCB=90°$，点 M 是 BD 的中点，所以 $MC=MA$。因为 N 是 AC 中点，所以 $AN=CN$，$MN\perp AC$，故 MN 垂直平分 AC。

22 提示：先证 $\triangle EBH\cong\triangle ABC$，所以 $EH=AC=AD$。再证 $\triangle EFH\cong\triangle DFA$，所以 $EF=DF$。

23 提示：延长 AD 至点 E，使 $DE=DA$，并连接 BE，证明 $\triangle DAC\cong\triangle DEB$，所以 $AC=BE$，$\angle AEB=90°$，所以 $AC=\frac{1}{2}AB$。

24 (1) 略　(2) 提示：因为 $\triangle ADC$ 为直角三角形，E 是 AD 中点，所以 $AD=2CE$，而 $BD=$

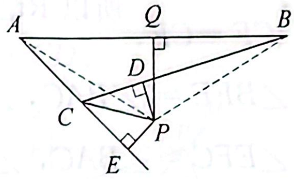
AD,所以 $BD=2CE$。

25 (1) $y=1+\frac{x}{8}$, $0<x\leqslant4$ (2) 点 P 与点 Q 重合时,$BP+AQ=4$,即 $x+\frac{x}{8}+1=4$,$x=\frac{8}{3}$,所以 $BP=\frac{8}{3}$ (3) 当 $0<x\leqslant\frac{8}{3}$ 时,$PQ=3-\frac{9}{8}x$;当 $\frac{8}{3}<x\leqslant4$ 时,$PQ=\frac{9}{8}x-3$。

第十五周　角平分线的性质定理

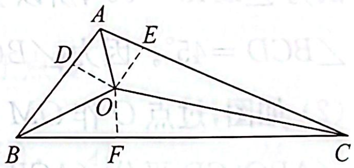
1 A **2** B **3** C **4** C **5** D **6** D **7** 2 **8** 4 **9** 5

10 1 [提示:如图,连接 PA、PB,因为 CP 是 $\angle BCE$ 的平分线,$PD\perp BC$,$PE\perp AC$,所以 $PD=PE$。在 Rt$\triangle CDP$ 和 Rt$\triangle CEP$ 中,因为 $\begin{cases}PD=PE,\\PC=PC,\end{cases}$ 所以 Rt$\triangle CDP\cong$Rt$\triangle CEP$(HL)。所以 $CD=CE$,因为 PQ 是线段 AB 的垂直平分线,所以 $PA=PB$,在 Rt$\triangle AEP$ 和 Rt$\triangle BDP$ 中,因为 $\begin{cases}PE=PD,\\PA=PB,\end{cases}$ 所以 Rt$\triangle AEP\cong$Rt$\triangle BDP$(HL)。所以 $AE=BD$,所以 $AC+CE+CD=BD+CD=BC=6$,所以 $CE=CD=\frac{1}{2}\times(6-4)=1$。]



第 10 题图

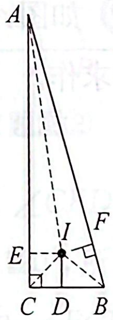
11 4 **12** 96° **13** 2∶4∶5 [提示:过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D,$OE\perp AC$ 于点 E,$OF\perp BC$ 于点 F。因为 OA、OB、OC 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线,$OD\perp AB$,$OE\perp AC$,$OF\perp BC$,所以 $OD=OE=OF$。因为 $AB=4$,$AC=8$,$BC=10$,所以 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}:S_{\triangle BCO}=AB:AC:BC=4:8:10=2:4:5$。]



第 11 题图

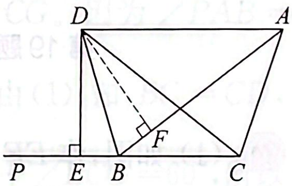
14 ①③④ **15** 3

16 3 [提示:过 I 作 $IE\perp AC$ 于点 E,$IF\perp AB$ 于点 F,连接 IA、IC、IB。因为 I 是三条角平分线的交点,$ID\perp BC$,所以 $IE=ID=IF$,设 $IE=ID=IF=R$,因为 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=24$,$CB=7$,所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times24\times7=84$,所以 $S_{\triangle ACI}+S_{\triangle BCI}+S_{\triangle ABI}=84$,所以 $\frac{1}{2}\times AC\times IE+\frac{1}{2}\times BC\times ID+\frac{1}{2}\times AB\times IF=84$,解得:$R=3$。]



第 16 题图

17 1 [提示:如图,过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F,因为 BD 是 $\angle ABP$ 的平分线,$DE\perp BP$,$DF\perp AB$,所以 $DE=DF$。在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,因为 $\begin{cases}BD=BD,\\DE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle BDE\cong\triangle BDF$(HL),所以 $BE=BF$。在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDE$ 中,因为 $\begin{cases}DA=DC,\\DE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADF\cong$



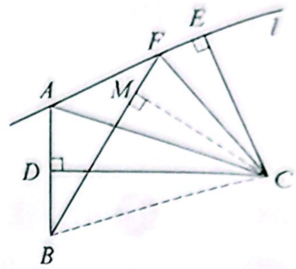
第 17 题图

$\triangle CDE$(HL)，所以 $AF=CE$。因为 $AF=AB-BF$，$CE=BC+BE$，所以 $AB-BF=BC+BE$，所以 $2BE=AB-BC$。

因为 $AB=5$，$BC=3$，所以 $2BE=5-3=2$，解得 $BE=1$。]

18 $BF=AE+EF$ [提示：如图，连接 BC，过点 C 作 $CM\perp BF$ 交于点 M。因为 CD 是线段 AB 的垂直平分线，所以 $AC=BC$，所以 $\angle CAB=\angle CBA$。因为 CF 平分 $\angle BFE$，$CE\perp EF$，$CM\perp MF$，所以 $CM=CE$，$\angle BFC=\angle EFC$。在 Rt$\triangle ECF$ 和 Rt$\triangle MCF$ 中，因为 $\begin{cases}CM=CE,\\CF=CF,\end{cases}$ 所以 Rt$\triangle ECF\cong$ Rt$\triangle MCF$(HL)，所以 $EF=MF$。因为 $\angle BFE=2\angle BAC$，$\angle BFE=\angle BAC+\angle CAF+\angle ABF$，所以 $\angle BFC=\angle EFC=\angle BAC$，$\angle BAC=\angle CAF+\angle ABF$。又因为 $\angle ABC=\angle CBF+\angle ABF$，所以 $\angle CBF=\angle CAF$。在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle MBC$ 中，

因为 $\begin{cases}\angle AEC=\angle BMC=90^\circ,\\\angle CBM=\angle CAE,\\AC=BC,\end{cases}$ 所以 $\triangle EAC\cong\triangle MBC$(AAS)，所以 $EA=MB$，故 $BF=BM+FM=AE+EF$。]

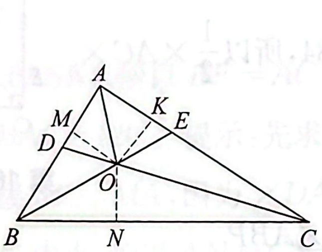


第 18 题图

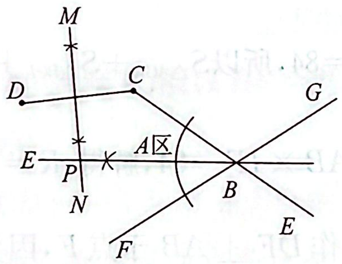
19 (1) 因为 BE 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACB$，所以 $\angle ABC=2\angle CBE$，$\angle ACB=2\angle BCD$。因为 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle ABC+\angle ACB=90^\circ$，即 $2\angle CBE+2\angle BCD=90^\circ$，所以 $\angle CBE+\angle BCD=45^\circ$。因为 $\angle BOD$ 是 $\triangle OBC$ 的外角，所以 $\angle BOD=\angle CBE+\angle BCD=45^\circ$。

(2) 如图，过点 O 作 $OM\perp AB$ 于点 M，$ON\perp BC$ 于点 N，$OK\perp AC$ 于点 K。因为 BE 平分 $\angle ABC$，CD 平分 $\angle ACB$，所以 $OM=ON$，$ON=OK$，所以 $OM=OK$。又因为 $OM\perp AB$ 于点 M，$OK\perp AC$ 于点 K，所以点 O 在 $\angle BAC$ 的平分线上。所以 AO 平分 $\angle BAC$。

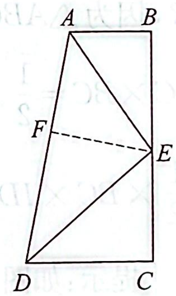
20 如图，作线段 CD 的垂直平分线 MN，作 $\angle CBF$ 的角平分线 BE 交 MN 于点 P，点 P 即为所求作。



第 19 题图



第 20 题图



第 21 题图

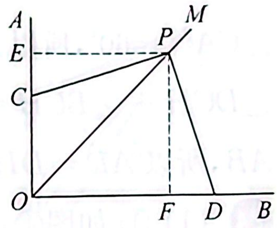
21 (1) 如图，作 $EF\perp AD$ 于点 F，所以 $\angle DFE=\angle AFE=90^\circ$。因为 $\angle B=\angle C=90^\circ$，所以 $\angle B=\angle AFE=\angle DFE=\angle C=90^\circ$，所以 $CB\perp AB$，$CB\perp CD$。因为 DE 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle EDC=\angle EDF$，$CE=EF$。因为 E 是 BC 的中点，所以 $CE=BE$，所以 $BE=EF$。在

Rt△AEB 和 Rt△AEF 中，因为$\begin{cases}AE=AE,\\EB=EF,\end{cases}$所以 Rt△AEB ≌ Rt△AEF（HL），所以 $\angle EAB=\angle EAF$，所以 AE 是$\angle DAB$ 的平分线。

(2) 在$\triangle DEC$ 和$\triangle DEF$ 中，因为$\begin{cases}\angle EDC=\angle EDF,\\\angle C=\angle DFE,\\DE=DE,\end{cases}$ 所以 $\triangle DEC\cong\triangle DEF$（AAS），所以 $CD=FD$，$EC=EF$。在 Rt△AEB 和 Rt△AEF 中，因为$\begin{cases}AE=AE,\\EB=EF,\end{cases}$所以 Rt△AEB ≌ Rt△AEF（HL），所以 $AB=AF$。因为 $AD=AF+DF$，所以 $AD=AB+CD$。

22 (1) 如图①，过点 P 作 $PE\perp OA$ 于点 E，$PF\perp OB$ 于点 F。因为 OM 平分$\angle AOB$，点 P 在 OM 上，$PE\perp OA$，$PF\perp OB$，所以 $PE=PF$（角平分线上的点到角两边的距离相等）。又因为 $\angle AOB=90°$，$\angle PEO=\angle PFO=90°$，所以 $\angle EPF=360°-90°-90°-90°=90°$，所以 $\angle EPC+\angle CPF=90°$。因为 $\angle CPD=90°$，所以 $\angle CPF+\angle FPD=90°$，所以 $\angle EPC=\angle FPD$。在 $\triangle PCE$ 与 $\triangle PDF$ 中，因为

$\begin{cases}\angle PEC=\angle PFD,\\PE=PF,\\\angle EPC=\angle FPD,\end{cases}$ 所以 $\triangle PCE\cong\triangle PDF$（ASA），所以 $PC=PD$。



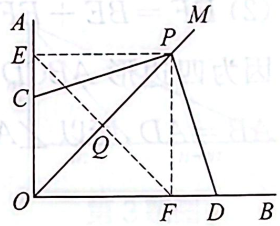
第 22 题图①

(2) 由(1)得，$S_{四边形PCOD}=S_{四边形PEOF}$。如图②，连接 EF，与 OP 相交于点 Q。

在$\triangle PEO$ 与$\triangle PFO$ 中，因为$\begin{cases}PO=PO,\\PE=PF,\end{cases}$所以 $\triangle PEO\cong\triangle PFO$（HL），

所以 $OE=OF$，所以 $\angle OEF=\angle OFE=45°$。

又因为 $\angle EOP=\angle FOP=45°$，所以 $\angle EQO=\angle FQO=90°$，所以 $EQ=OQ$，$QF=OQ$。同理 $PQ=EQ$，$PQ=QF$，即 $EQ=OQ=QF=QP=1$，所以$S_{四边形PCOD}=S_{四边形PEOF}=S_{\triangle EOQ}+S_{\triangle EPQ}+S_{\triangle FOQ}+S_{\triangle FPQ}=2$。

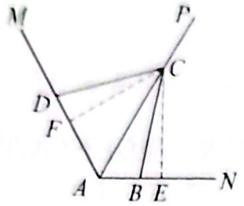


第 22 题图②

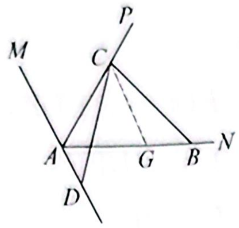
23 (1) 如图①，过点 C 作 $CE\perp AN$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp AM$ 于点 F，所以 $\angle CFD=\angle CEA=90°$。因为 AC 是 $\angle MAN$ 的平分线，所以 $CE=CF$。因为 $\angle MAN=120°$，所以 $\angle ECF=360°-90°-90°-120°=60°$。因为 $\angle BCD=60°$，所以 $\angle DCF=60°-\angle BCF$，$\angle BCE=60°-\angle BCF$，所以 $\angle DCF=\angle BCE$，所以$\triangle CDF\cong\triangle CBE$（AAS），所以 $CD=CB$。

(2) $AB=AC+AD$。理由如下：如图②，在 AB 上截取 $AG=AC$，连接 CG。因为 $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle MAN=60°$，所以 $\triangle ACG$ 是等边三角形，所以 $AC=CG=AG$。由(1)知，$BC=CD$，$\angle BCD=60°$，因为 $\angle ACG=\angle ACD+\angle DCG=60°$，$\angle BCD=\angle DCG+\angle BCG=60°$，所以 $\angle ACD=\angle BCG$，因为 $\angle MAN=120°$，$\angle AGC=60°$，所以 $\angle CAD=\angle CGB=120°$，所以

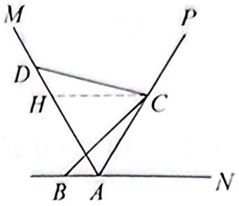
$\triangle BCG \cong \triangle DCA$(AAS)，所以 $AD=BG$，所以 $AB=AG+BG=AC+AD$。



第 23 题图①



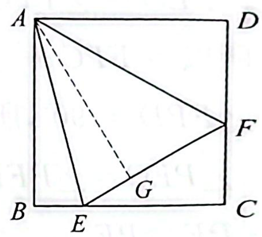
第 23 题图②



第 23 题图③

(3) $AD=AB+AC$。理由如下：如图③，在 AD 上截取 $AH=AC$，连接 CH。因为 $\angle MAC=60°$，所以 $\triangle ACH$ 是等边三角形，所以 $AH=CH=AC$。因为 $\angle CHA=60°$，$\angle MAC=\angle CAN=60°$，所以 $\angle CHD=\angle BAC=120°$。因为 $\angle ACH=\angle BCA+\angle HCB=60°$，$\angle DCB=\angle DCH+\angle BCH=60°$，所以 $\angle DCH=\angle BCA$，所以 $\triangle CDH \cong \triangle CBA$(AAS)，所以 $DH=AB$，所以 $AD=DH+AH=AB+AC$，即 $AD=AB+AC$。

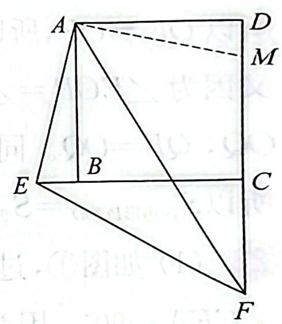
24 (1) ① 如图①，过点 A 作 $AG \perp EF$，垂足为点 G。因为四边形 $ABCD$ 为正四边形，所以 $\angle B=\angle D=90°$，$AB=AD$，所以 $AB \perp BE$，$AD \perp DF$。因为 AE 平分 $\angle BEF$，$AB \perp BE$，$AG \perp EF$，所以 $AB=AG$，所以 $AG=AD$。因为 $AD \perp DF$，$AG \perp EF$，所以 AF 平分 $\angle DFE$。



第 24 题图①

② $DF+BE=EF$。理由如下：因为 $\angle B=\angle AGE=90°$，$AE=AE$，$AB=AG$，所以 $\triangle ABE \cong \triangle AGE$(HL)，所以 $BE=EG$。同理可证：$DF=GF$，所以 $BE+DF=EG+GF=EF$。

(2) $DF=BE+EF$。理由如下：如图②，在 DC 上截取 $DM=BE$，连接 AM。因为四边形 $ABCD$ 为正四边形，所以 $\angle ABC=\angle D=\angle BAD=90°$，$AB=AD$，所以 $\angle ABE=180°-\angle ABC=90°$，所以 $\angle ABE=\angle ADM$。



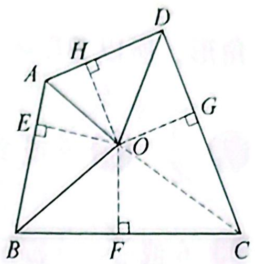
第 24 题图②

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADM$ 中，因为 $\begin{cases} AB=AD, \\ \angle ABE=\angle ADM, \\ BE=DM, \end{cases}$ 所以 $\triangle ABE \cong \triangle ADM$(SAS)，所以 $AE=AM$，$\angle EAB=\angle DAM$。因为 $\angle EAB+\angle BAF=\angle EAF=45°$，所以 $\angle DAM+\angle BAF=45°$，所以 $\angle MAF=\angle BAD-(\angle DAM+\angle BAF)=45°$，所以 $\angle EAF=\angle MAF=45°$，在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle MAF$ 中，因为 $\begin{cases} AE=AM, \\ \angle EAF=\angle MAF, \\ AF=AF, \end{cases}$ 所以 $\triangle EAF \cong \triangle MAF$(SAS)，所以 $EF=MF$，所以 $DF=DM+MF=BE+EF$。

25 (1) $PF=PN$；$PF=PM$；$PN=PM$。

(2)(Ⅰ) 过点 O 作 $OE \perp AB$，$OF \perp BC$，$OG \perp DC$，$OH \perp AD$，垂足分别为点 E、F、G、

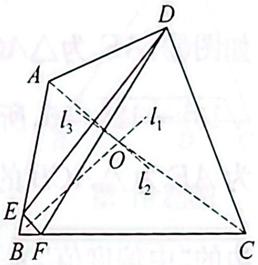
H。因为 AO 平分 $\angle BAD$，所以 $OE=OH$，同理 $OE=OF$，$OH=OG$。所以 $OF=OG$。所以点 O 在 $\angle BCD$ 的平分线上。



第 25 题图①

(Ⅱ) 因为 $OE\perp AB$，$OH\perp AD$，所以 $\angle OEA=\angle OHA=90°$。因为 AO 平分 $\angle BAD$，所以 $\angle OAE=\angle OAH$。在 $\triangle OAE$ 和 $\triangle OAH$ 中，因为 $\begin{cases}\angle OAE=\angle OAH,\\ \angle OEA=\angle OHA,\\ AO=AO,\end{cases}$ 所以 $\triangle OAE\cong\triangle OAH$。所以 $AE=AH$，同理 $BE=BF$，$CF=CG$，$DH=DG$。所以 $AD+BC=AH+HD+BF+FC=AE+DG+BE+GC=AB+CD$

(3) 交于一点。理由如下：如图②，在 AB 上取点 E，使 $AE=AD$，在 BC 上取点 F，使 $CF=CD$，连接 EF、ED、FD。因为 $AD+BC=AB+DC$，所以 $AD+BF+FC=AE+BE+DC$。又因为 $AD=AE$，$CD=CF$，所以 $AD+BF+CD=AD+BE+DC$，即 $BF=BE$。所以 $\triangle BEF$、$\triangle AED$、$\triangle CFD$ 均是等腰三角形。分别作 EF、ED、FD 的垂直平分线 l_1、l_2、l_3，三条直线相交于点 O。因为 l_1 是 EF 的垂直平分线，$\triangle BEF$ 是等腰三角形，所以 l_1 是 $\angle ABC$ 的角平分线。同理 l_2 是 $\angle BAD$ 的角平分线，l_3 是 $\angle BCD$ 的角平分线。所以点 O 在 $\angle ADC$ 的角平分线上。



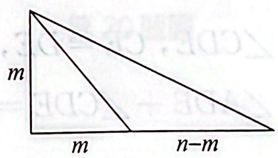
第 25 题图②

即四边形 $ABCD$ 的四条角平分线交于一点。

第十六周　勾股定理

1 C　2 C

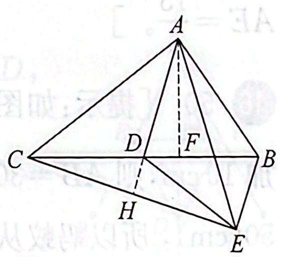
3 B ［提示：如图，$m^2+m^2=(n-m)^2$，$2m^2=n^2-2mn+m^2$，所以 $m^2+2mn-n^2=0$。］



第 3 题图

4 D　5 B

6 C ［提示：如图，延长 AD 交 CE 于点 H，作 $AF\perp CB$，垂足为点 F。在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=4$，所以 $BC=5$。因为 D 为 BC 的中点，所以 $AD=BD=DC$。因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}BC\cdot AF$，所以 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times AF$，解得 $AF=\frac{12}{5}$。由翻折的性质可知 $AC=AE$，$CD=ED$，所以 $AH\perp CE$，$CH=HE$。因为 $BD=CD$，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，由折叠可知 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADC}$，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}$，所以 $\frac{1}{2}BD\cdot AF=\frac{1}{2}AD\cdot HE$。因为 $AD=DB$，所以 $HE=AF=\frac{12}{5}$。所以 $CE=2HE=\frac{24}{5}$。因为 $CD=DE=DB$，所以 $\triangle CBE$ 为直角三

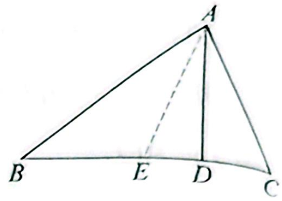


第 6 题图

角形。所以 $BE=\sqrt{CB^2-CE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$。]

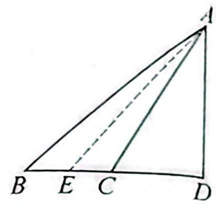
7 $\frac{3}{2}$　**8** 9 或 21　**9** 20　**10** 4　**11** $2\sqrt{3}$　**12** $\sqrt{7}$

13 6 或 $\frac{12}{7}$　[提示:如图①,AE 为$\triangle ACB$ 的中线,因为 $\angle ADC=90°$,所以 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$,所以 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$,所以 $BC=14$。因为 AE 为 $\triangle ACB$ 的中线,所以 $BE=7$,所以 $DE=BD-BE=2$,所以 $\triangle ABC$ 中 BC 边的"中偏度值"为:$\frac{12}{2}=6$;



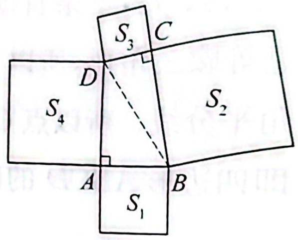
第 13 题图①

如图②,AE 为$\triangle ACB$ 的中线,因为 $\angle ADB=90°$,所以 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$,所以 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$,所以 $BC=4$。因为 AE 为 $\triangle ACB$ 的中线,所以 $BE=2$,所以 $DE=2+5=7$,所以$\triangle ABC$ 中 BC 边的"中偏度值"为$\frac{12}{7}$。]



第 13 题图②

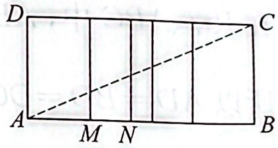
14 9　[提示:如图,连接 BD。由题意,得 $S_1=AB^2$, $S_2=BC^2$, $S_3=CD^2$, $S_4=AD^2$。在 Rt$\triangle ABD$ 中,由勾股定理得 $BD^2=AB^2+AD^2=S_1+S_4$。在 Rt$\triangle BCD$ 中,由勾股定理得 $BD^2=BC^2+CD^2=S_2+S_3$。所以$S_1+S_4=S_2+S_3$。所以$S_3=S_1+S_4-S_2=35-26=9$。]



第 14 题图

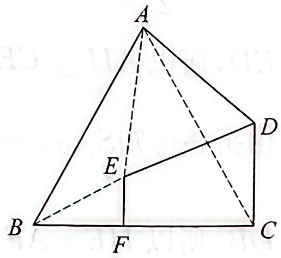
15 $\frac{13}{6}$　[提示:由折叠的性质可得 $AD=AB=2$, $\angle B=\angle ADB$, $\angle C=\angle CDE$, $CE=DE$,因为 $\angle BAC=90°$,所以 $\angle B+\angle C=90°$,所以 $\angle ADB+\angle CDE=90°$,所以 $\angle ADE=90°$。设 $AE=x$, $CE=DE=AC-AE=3-x$,在 Rt$\triangle ADE$ 中,由勾股定理得:$AD^2+DE^2=AE^2$,所以$2^2+(3-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{13}{6}$。所以 $AE=\frac{13}{6}$。]

16 50　[提示:如图所示:将图展开,图形长度增加 $2MN$,原图长度增加 10 cm,则 $AB=30+10=40$(cm),连接 AC,所以 $AC=\sqrt{40^2+30^2}=50$(cm),所以蚂蚁从 A 点爬到 C 点,它至少要走 50 cm 的路程。]



第 16 题图

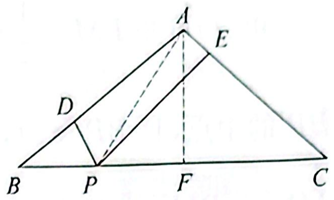
17 $\sqrt{13}$　[提示:如图,连接 AE、BE、AC。因为 $\angle B=60°$, $AB=BC$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $AB=AC$, $\angle BAC=60°$,因为将边 DA 绕点 D 逆时针旋转 $60°$ 得到线段 DE,所以 $\angle ADE=60°$, $AD=DE$,所以 $\triangle ADE$ 是等边三角形,所以 $AD=AE$, $\angle DAE=\angle BAC=60°$,所以 $\angle BAE=\angle CAD$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$,所以 $CD=BE$,因为 $EF\perp BC$,所以 $\angle BFE=90°$。在 Rt$\triangle BEF$ 中,$EF=2$, $BF=3$,由勾股定理得



第 17 题图

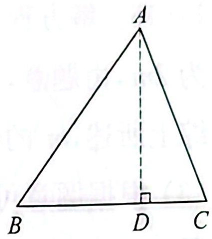
$BE=\sqrt{EF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，所以 $CD=\sqrt{13}$。]

18 4.8 [提示：过 A 点作 $AF\perp BC$ 于点 F，连接 AP。因为 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=8$，所以 $BF=4$。在 $\triangle ABF$ 中，$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=3$。因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，所以 $\frac{1}{2}\times 8\times 3=\frac{1}{2}\times 5\times PD+\frac{1}{2}\times 5\times PE$，所以 $12=\frac{1}{2}\times 5\times(PD+PE)$，所以 $PD+PE=4.8$。]



第 18 题图

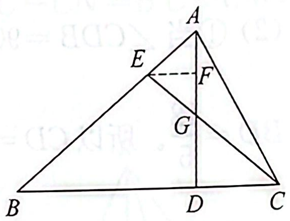
19 如图，作 $AD\perp BC$ 于点 D。在 $\triangle ABC$ 中，$AB=15$，$BC=14$，$AC=13$，设 $BD=x$，所以 $CD=14-x$。由勾股定理得：$AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$，$AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$，所以 $15^2-x^2=13^2-(14-x)^2$，解得 $x=9$。所以 $AD=12$。所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$。



第 19 题图

20 (1) 因为 $AD\perp BC$，所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$，所以 $\angle B+\angle BAD=90°$，$\angle DCG+\angle DGC=90°$。因为 $EB=EC$，所以 $\angle B=\angle DCG$，所以 $\angle BAD=\angle DGC$。因为 $\angle AGE=\angle DGC$，所以 $\angle BAD=\angle AGE$，所以 $EA=EG$，所以 $\triangle AEG$ 是等腰三角形。

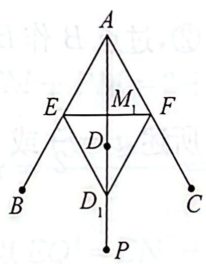
(2) 如图，过点 E 作 $EF\perp AG$，垂足为点 F。所以 $\angle EFG=90°$。因为 $EA=EG$，$EF\perp AG$，所以 $AG=2FG$。因为 G 为 CE 中点，所以 $EG=GC=\frac{1}{2}EC$。因为 $EB=EC=10$，所以 $GC=\frac{1}{2}EC=5$，因为 $\angle EFG=\angle CDG=90°$，$\angle EGF=\angle CGD$，所以 $\triangle EFG\cong\triangle CDG$(AAS)，所以 $FG=DG$。在 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，$CD=3$，所以 $DG=\sqrt{CG^2-CD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $FG=DG=4$，所以 $AG=2FG=8$。



第 20 题图

21 (1) 因为 $AE=AF$，所以点 A 在 EF 的垂直平分线上。因为 $DE=DF$，所以点 D 在 EF 的垂直平分线上，所以 AD 垂直平分 EF，所以 $AP\perp EF$。

(2) 由(1)可得 AD 垂直平分 EF，同理 EF 垂直平分 AD，所以 $AM=\frac{1}{2}AD$，$EM=\frac{1}{2}EF$。因为 $EF=\sqrt{3}AD$，所以 $EM=\sqrt{3}AM$。所以 $AE=\sqrt{EM^2+AM^2}=\sqrt{3AM^2+AM^2}=2AM$，所以 $AE=AD=DE=20\text{ cm}$。如图，同理可得 $EF=AE=AF=20\text{ cm}$，所以 $AD_1=\sqrt{3}EF=20\sqrt{3}\text{ cm}$，所以 $DD_1=AD_1-AD=(20\sqrt{3}-20)\text{ cm}$。

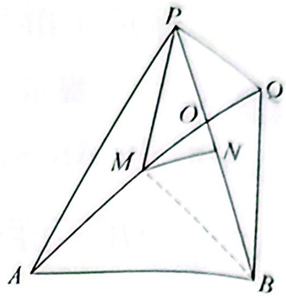


第 21 题图

22 (1) $\triangle PMN$ 为直角三角形。理由如下：如图，连接 BM。因为 $\angle APQ=\angle ABQ=90°$，点 M 是 AQ 的中点，所以 $PM=\frac{1}{2}AQ$，$BM=\frac{1}{2}AQ$，所以 $PM=BM$，又因为 N 为 PB 的中点，所

以 $MN \perp PB$，所以$\triangle PMN$ 为直角三角形。

(2) 由(1)可知 $PM=\frac{1}{2}AQ$，因为 $AQ=26$，所以 $PM=13$。又因为 N 为 BP 的中点，且 $BP=24$，所以 $PN=\frac{1}{2}BP=12$。因为 $MN \perp PB$，所以 $MN^2=PM^2-PN^2=25$，所以 $MN=5$。



第 22 题图

23 (1) 8，15，17

(2) 由题意可得，该组勾股数中最大的数为 m^2+1。若最小边为 m^2-1，由题意得 $m^2+1+m^2-1=16$。解方程，得 $m=\pm\sqrt{8}$。因为勾股数为正整数，所以 $m=\pm\sqrt{8}$ 不符题意，舍去；若最小边为 $2m$，由题意，得 $m^2+1+2m=16$。解方程，得 $m=3$ 或 $m=-5$(不符合题意，舍去)。

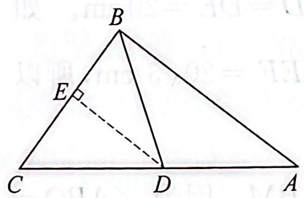
综上所述，m 的值为 3。

(3) 根据题意可得：最大的数为 $m^2+1=a^2+6a+10=(a+3)^2+1$。因为 a 是任意正整数，所以 $m=a+3$，所以 $m^2-1=(a+3)^2-1=(a^2+6a+9)-1=a^2+6a+8$，$2m=2(a+3)=2a+6$，所以另外两个数分别为 a^2+6a+8，$2a+6$。

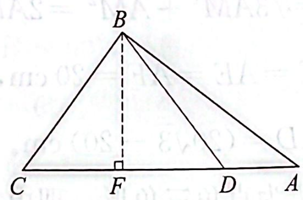
24 (1) 当 $t=2$ 时，$CD=2\times1=2$。因为 $\angle ABC=90^\circ$，$AB=4$，$BC=3$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，$AD=AC-CD=5-2=3$。

(2) ①当 $\angle CDB=90^\circ$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，即 $\frac{1}{2}\times5\cdot BD=\frac{1}{2}\times4\times3$，解得 $BD=\frac{12}{5}$。所以 $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\frac{9}{5}$，$t=\frac{9}{5}\div1=\frac{9}{5}$(秒)；②当 $\angle CBD=90^\circ$ 时，点 D 和点 A 重合，$t=5\div1=5$(秒)。综上所述，$t=\frac{9}{5}$ 或 5 秒。

(3) ①当 $CD=BD$ 时，如图①，过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E，则 $CE=BE$，$CD=AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{2}$，$t=\frac{5}{2}\div1=2.5$；②当 $CD=BC$ 时，$CD=3$，$t=3\div1=3$；③当 $BD=BC$ 时，如图②，过点 B 作 $BF\perp AC$ 于点 F，则 $CF=\frac{9}{5}$，$CD=2CF=\frac{9}{5}\times2=\frac{18}{5}$，$t=\frac{18}{5}\div1=\frac{18}{5}$。综上所述，$t=\frac{5}{2}$ 或 3 或 $\frac{18}{5}$ 秒时，$\triangle CBD$ 是等腰三角形。

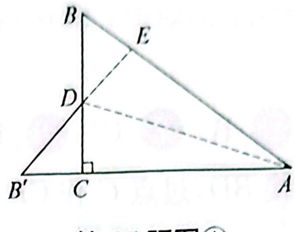


第 24 题图①



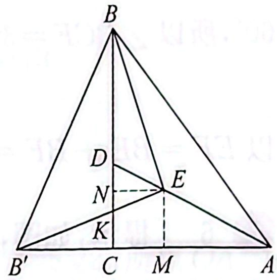
第 24 题图②

25 (1) 由翻折可得 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，如图①，作 $DE\perp AB$ 于点 E，则 $DE=DC$，在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD$，所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot DE}{\frac{1}{2}AC\cdot CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$。又因为 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}$，所以 $\frac{BD}{CD}=\frac{5}{3}$，所以 $CD=\frac{3}{8}BC=\frac{3}{8}\times 8=3$。



第 25 题图①

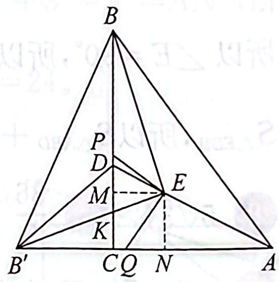
(2) ① 证明：如图②，过点 E 作 $EN\perp BC$ 于点 N，$EM\perp AC$ 于点 M，设 $B'E$ 交 BC 于点 K。因为 $\angle B'KC=\angle BKE$，且 $\angle BEK=\angle B'CK=90°$，所以 $\angle NBE=\angle EB'M$。因为 $B'E=BE$，$\angle BNE=\angle B'ME=90°$，所以 $\triangle BEN\cong\triangle B'EM$(AAS)，所以 $EM=EN$。因为 $EN\perp BC$，$EM\perp AC$，所以 E 在 $\angle ACB$ 的角平分线上；



第 25 题图②

② 因为 $EN\perp BC$，$EM\perp AC$，$\angle MCN=90°$，所以四边形 $EMCN$ 为矩形，因为 $EM=EN$，所以矩形 $EMCN$ 为正方形，设 $EN=a$，则 $ME=EN=CM=CN=a$。因为 $\triangle BEN\cong\triangle B'EM$，所以 $BN=B'M$，所以 $BC-CN=B'C+CM$，即 $8-a=a+4$，解得 $a=2$，即 $EM=2$。所以 E 到 AC 的距离为 2。

(3) 由(2)可知 E 在 $\angle ACB$ 的平分线上，如图③，作 $EM\perp BC$ 于点 M，$EN\perp AC$ 于点 N，所以 $EM=EN=2$。由(2)可知，四边形 $EMCN$ 是正方形，所以 $\angle MEN=90°=\angle PEQ$，所以 $\angle PEM=\angle QEN$。因为 $\angle PME=\angle QNE=90°$，$EM=EN$，所以 $\triangle PME\cong\triangle QNE$(ASA)，所以 $PM=QN$。当 $AE=EQ$ 时，因为 $EN\perp AQ$，所以 $AN=QN=AC-CN=4$，所以 $PM=QN=4$，所以 $CP=CM+PM=6$，所以 $BP=8-6=2$，所以 $t=\frac{2}{2}=1$；当 $AE=AQ$ 时，$AE=\sqrt{EN^2+AN^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

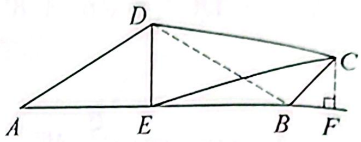


第 25 题图③

所以 $AQ=AE=2\sqrt{5}$，因为 $AN=4$，所以 $QN=2\sqrt{5}-4=PM$，所以 $CP=CM+PM=2+2\sqrt{5}-4=2\sqrt{5}-2$，所以 $BP=BC-CP=8-(2\sqrt{5}-2)=10-2\sqrt{5}$，所以 $t=\frac{10-2\sqrt{5}}{2}=5-\sqrt{5}$；当 $EQ=QA$ 时，设 $QN=b$，则 $AQ=4-b=EQ$，因为 $\angle ENQ=90°$，所以 $EQ^2=EN^2+NQ^2$，即 $(4-b)^2=b^2+2^2$，解得 $b=\frac{3}{2}$。所以 $QN=\frac{3}{2}=PM$，所以 $CP=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $BP=BC-CP=8-\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$，所以 $t=\frac{\frac{15}{2}}{2}=\frac{15}{4}$。综上所述，当 P 的运动时间为 1 秒或 $(5-\sqrt{5})$ 秒或 $\frac{15}{4}$ 秒时，$\triangle AEQ$ 是等腰三角形。

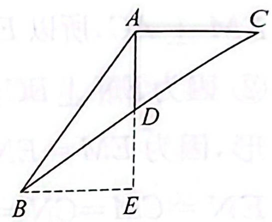
第十七周　勾股定理的逆定理

1 B　2 C　3 B　4 C　5 C　6 D ［提示：如图，连接 BD，过点 C 作 $CF\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 F，则 $\angle BFC=90^\circ$，因为点 E 为 AB 的中点，$DE\perp AB$，所以 $BD=AD$，$AE=BE$。因为 $\angle DAB=30^\circ$，所以 $\angle DBE=\angle DAB=30^\circ$，$BD=AD=2DE=2\sqrt{3}$。由勾股定理得 $AE=BE=3$。因为 $BC^2+BD^2=1^2+(2\sqrt{3})^2=13=CD^2$，所以 $\triangle BCD$ 是直角三角形，$\angle CBD=90^\circ$，所以 $\angle CBF=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$，所以 $\angle BCF=30^\circ$。因为 $\angle BFG=90^\circ$，所以 $BF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$。由勾股定理得 $CF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $EF=BE+BF=\frac{7}{2}$。在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中，由勾股定理得 $CE=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$。］



第6题图

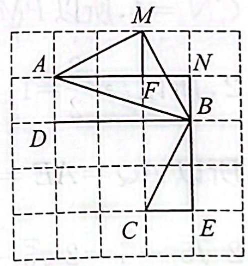
7 6 ［提示：如图，延长 AD 至 E，使 $ED=AD=2$，连接 BE。因为 AD 是 BC 的中线，所以 $BD=CD$。在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，因为 $\begin{cases}AD=DE,\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ BD=CD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$(SAS)，所以 $AC=BE$。因为 $AC=3$，所以 $BE=3$。因为 $ED=AD=2$，所以 $AE=4$。因为 $3^2+4^2=5^2$，所以 $\angle E=90^\circ$，所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}BE\cdot AE=\frac{1}{2}\times3\times4=6$。因为 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$，所以 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle EDB}$，所以 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle EDB}$，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}$，所以 $S_{\triangle ABC}=6$。］



第7题图

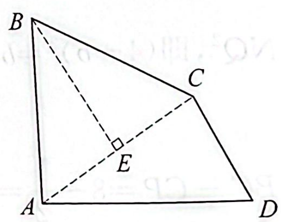
8 $5\sqrt{34}$　9 $\frac{36}{5}$

10 45° ［提示：如图，取网格点 M、N、F，连接 AM、AN、BM、MF、BN。根据网格线可知 $NB=1=MF$，$AN=3$，$AF=2$，$\angle CBE=\angle FAM$，$\angle ABD=\angle NAB$，则 $\angle ABD+\angle CBE=\angle MAB$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ANB$ 中，有 $AB^2=AN^2+BN^2=3^2+1^2=10$，同理可求得 $BM^2=AM^2=AF^2+MF^2=2^2+1^2=5$。因为 $BM^2+AM^2=AB^2$，所以 $\triangle ABM$ 是直角三角形，且 $AM=BM$，所以 $\angle MAB=45^\circ$，即：$\angle ABD+\angle CBE=45^\circ$。］



第10题图

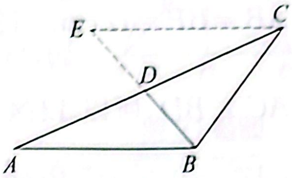
11 3.2 ［提示：如图，连接 AC，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E。因为 $AB=BC=2$，$\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AC=AB=2$。因为 $BE\perp AC$，所以 $AE=\frac{1}{2}AC=1$，所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\sqrt{3}$。因为 $CD=1.5$，$AD=2.5$，所以 AC^2+



第11题图

$CD^2=2^2+1.5^2=6.25=AD^2$，所以$\triangle ACD$是直角三角形，且$\angle ACD=90°$，所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=1.5$，所以$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\sqrt{3}+1.5\approx3.2$。]

12 $2\sqrt{13}$　[提示：如图，延长BD至点E，使$ED=BD=2$，则$BE=BD+ED=4$。因为$BD=2$，$BC=3BD$，所以$BC=6$。因为$CD=2\sqrt{10}$，所以$CD^2=(2\sqrt{10})^2=40$，$BD^2+BC^2=2^2+6^2=40$，所以$BD^2+BC^2=CD^2$，所以$\triangle CDB$是直角三角形，且$\angle CBD=90°$，所以$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$。在$\triangle ABD$和$\triangle CED$中，因为$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADB=\angle CDE,\\ BD=ED,\end{cases}$所以$\triangle ABD\cong\triangle CED$(SAS)，所以$AB=CE=2\sqrt{13}$。]



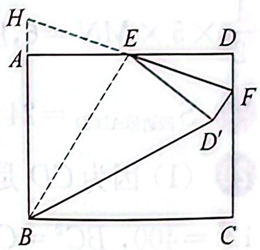
第12题图

13 $135°$

14 $\frac{5}{4}$　[提示：根据勾股定理得：$OA=OB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$，所以$OA^2+OB^2=AB^2$，所以$\triangle AOB$为直角三角形，$\angle AOB=90°$。设这个圆锥的底面半径为$r$，根据题意得$2\pi r=\frac{90\cdot\pi\cdot5}{180}$，解得$r=\frac{5}{4}$，即这个圆锥的底面半径为$\frac{5}{4}$。]

15 24　[提示：因为直线EF、MN分别为AB、AC的垂直平分线，所以$AF=BF=4$，$AN=CN=5$。因为$FN=3$，所以$BC=BF+FN+CN=12$，$AF^2+FN^2=4^2+3^2=5^2=AN^2$，所以$\angle AFN=90°$，所以$AF\perp BC$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AF=\frac{1}{2}\times12\times4=24$。]

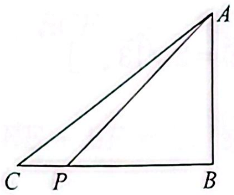
16 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　[提示：如图，连接BE，延长FE交BA的延长线于点H。因为在长方形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$AD=2$，E为边AD的中点，所以$AE=DE=1$，$\angle BAE=\angle D=90°$。因为将$\triangle DEF$沿EF翻折，点D的对应点为D'，所以$ED=ED'=1$，$\angle ED'F=\angle D=90°$，$\angle DEF=\angle D'EF$。



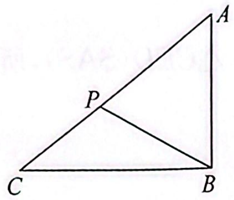
第16题图

在$\text{Rt}\triangle EAH$和$\text{Rt}\triangle EDF$中，因为$\begin{cases}\angle AEH=\angle DEF,\\ AE=DE,\\ \angle EAH=\angle D=90°,\end{cases}$所以$\text{Rt}\triangle EAH\cong\text{Rt}\triangle EDF$(ASA)，所以$DF=AH$，所以$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$。因为$BD'=2$，所以$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$，所以$\triangle BED'$为直角三角形，所以$\angle BED'=90°$。设$\angle DEF=\alpha$，则$\angle AEH=\angle DEF=\angle FED'=\alpha$，所以$\angle AHE=90°-\alpha$，$\angle HEB=180°-90°-\alpha=90°-\alpha$，所以$\angle HEB=\angle AHE$，所以$\triangle BHE$为等腰三角形，所以$BH=BE=\sqrt{3}$，所以$AH=BH-AB=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，所以$DF=AH=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。]

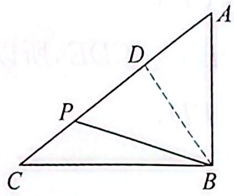
17 6 s 或 12 s 或 10.8 s ［提示：如图①，因为 $BC=16\text{ cm}$，$AC=20\text{ cm}$，$AB=12\text{ cm}$，所以 $BC^2+AB^2=AC^2$，所以 $\angle B=90°$。如图①，$AB=PB=12\text{ cm}$，所以 $t=12\div2=6(\text{s})$；如图②，$AP=AB=12\text{ cm}$，所以 $BC+PC=16+20-12=24(\text{cm})$，所以 $t=24\div2=12(\text{s})$；如图③，$AB=BP=12\text{ cm}$。过点 B 作 $BD\perp AC$ 于 D，则 $AD=PD$。因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times AC\times BD$，所以 $12\times16=20BD$，所以 $BD=9.6\text{ cm}$，由勾股定理得：$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{12^2-9.6^2}=7.2(\text{cm})$，所以 $AP=2AD=14.4(\text{cm})$，所以 $t=(16+20-14.4)\div2=10.8(\text{s})$。综上所述，$t$ 的值是 6 s 或 12 s 或 10.8 s。］



第 17 题图①

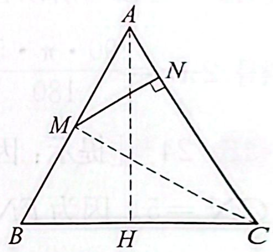


第 17 题图②



第 17 题图③

18 $\frac{12}{5}$ ［提示：如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 M，连接 CM。因为 $AB=AC$，$AH\perp BC$，所以 $BH=CH=\frac{1}{2}BC=3$。由勾股定理，可得 $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=4$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}\times6\times4=12$。因为 M 是 AB 的中点，所以 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=6$。因为 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}AC\cdot MN$，所以 $\frac{1}{2}\times5\times MN=6$，所以 $MN=\frac{12}{5}$。］



第 18 题图

19 $S_{四边形ABCD}=24\text{ m}^2$

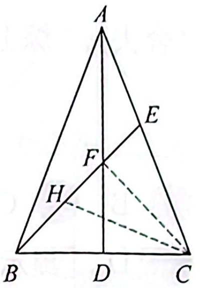
20 (1) 因为 CD 是 $\triangle ABC$ 的高，所以 $\angle ADC=\angle CDB=90°$，所以 $AC^2=AD^2+CD^2=16^2+12^2=400$，$BC^2=CD^2+BD^2=12^2+9^2=225$，所以 $AC=20$，$BC=15$。

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形。理由如下：因为 $AB=AD+BD=25$，$AC=20$，$BC=15$，所以 $BC^2+AC^2=15^2+20^2=625$，$AB^2=25^2=625$，所以 $BC^2+AC^2=AB^2$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

21 (1) 证明：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，所以 $BD=CD$，由勾股定理得 $AB^2-AD^2=BD^2$，所以 $AB^2-AD^2=BD\cdot CD$。

(2) 解：由 (1) 可知 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=2.5$，在 Rt$\triangle ABD$ 中，由勾股定理得，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{6.5^2-2.5^2}=6$，在 Rt$\triangle BDF$ 中，$\angle CBE=45°$，所以 $\triangle BDF$ 是等腰直角三角形，所以 $DF=BD=2.5$，所以 $AF=AD-DF=6-2.5=3.5$，所以 AF 的长为 3.5。

(3) 能围成直角三角形。理由如下：如图，在 BF 上取一点 H，使 $BH=EF$，连接 CF、CH，因为 $\angle CBE=45°$，$AD\perp BC$，所以 $\angle BFD=45°$，所以 $\angle AFE=\angle BFD=45°$，因为 $BH=FE$，$\angle CBH=\angle AFE=45°$，$BC=AF$，所以 $\triangle CHB\cong\triangle AEF$(SAS)，所以 $AE=CH$，$\angle AEF=\angle CHB$，因为 $\angle CEF+\angle AEF=180°=\angle CHF+\angle CHB$，所以 $\angle CEF=\angle CHF$，所以 $CE=CH$，因为 $BD=CD$，$FD\perp BC$，所以 $CF=BF$，$\angle CFD=\angle BFD=45°$，所以 $\angle CFB=\angle CFD+\angle BFD=90°$，即 $CF\perp EH$，又因为 $CE=CH$，所以 $EF=FH$。在 $\mathrm{Rt}\triangle CFH$ 中，由勾股定理，得 $CF^2+FH^2=CH^2$，所以 $BF^2+EF^2=AE^2$，所以以 BF、EF 和 AE 为边，能围成直角三角形。



第21题图

22 (1) 是。理由如下：因为 $AM^2+BN^2=1.5^2+2^2=6.25$，$MN^2=2.5^2=6.25$，所以 $AM^2+NB^2=MN^2$，所以以 AM、MN、NB 为边的三角形是一个直角三角形，所以点 M、N 是线段 AB 的勾股分割点。

(2) 设 $BN=x$，则 $MN=24-AM-BN=18-x$。① 当 MN 为最长线段时，依题意 $MN^2=AM^2+NB^2$，即 $(18-x)^2=x^2+36$，解得 $x=8$；② 当 BN 为最长线段时，依题意 $BN^2=AM^2+MN^2$，即 $x^2=36+(18-x)^2$，解得 $x=10$。综上所述，BN 的长为 8 或 10。

23 ①当 $\angle CB'E=90°$，即点 B' 在 AC 上时，此时 $BE=3$；② 当 $\angle CEB'=90°$ 时，点 B' 在 AD 上，此时 $BE=6$。

24 探究一：(1) 13　(2) 直角

探究二：(3) $S_1+S_2=S_3$。理由如下：设直角三角形的三边分别为 a、b、c($a<b<c$)，则 $a^2+b^2=c^2$。$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\pi=\frac{a^2\pi}{8}$，$S_2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{b}{2}\right)^2\times\pi=\frac{b^2\pi}{8}$，$S_3=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}\right)^2\times\pi=\frac{c^2\pi}{8}$，因为 $S_1+S_2=\frac{a^2\pi}{8}+\frac{b^2\pi}{8}=(a^2+b^2)\times\frac{\pi}{8}=\frac{c^2\pi}{8}$，所以 $S_1+S_2=S_3$。

(4) 由图②可知 $S_{阴影}=S_{直角三角形}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$。

25 (1) 当 $DF=DE$ 时，AD 是 $\triangle AEF$ 的中线。$9-t=2t$，解得 $t=3$。

(2) 当 $t=1$ 时，$\triangle AEF$ 是直角三角形。理由如下：因为 $t=1$，所以 $DF=9-1=8$，$DE=1\times 2=2$，$EF=8+2=10$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF^2=4^2+8^2=80$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE^2=4^2+2^2=20$。所以 $AF^2+AE^2=80+20=100$。又因为 $EF^2=10^2=100$，所以 $AF^2+AE^2=EF^2$，所以 $\angle EAF=90°$，即 $\triangle AEF$ 是直角三角形。

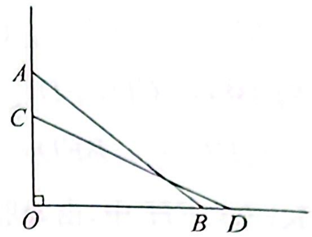
(3) 存在。分两种情况讨论：①当 $AF=EF$ 时，$DF=9-t$，$DE=2t$，$EF=DF+DE=9+t$，所以 $AF=9+t$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF^2=AD^2+DF^2$，所以 $(9+t)^2=4^2+(9-t)^2$，解得 $t=\frac{4}{9}$；②当 $AF=AE$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF^2=AD^2+DF^2=4^2+(9-t)^2$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AE^2=AD^2+DE^2=4^2+(2t)^2$。所以 $4^2+(9-t)^2=4^2+(2t)^2$。解得 $t_1=3$，$t_2=-9$

(舍去)。综上,$\triangle AEF$ 是以 AF 为腰的等腰三角形时,t 的值是 3 或 $\frac{4}{9}$。

第十八周　勾股定理和勾股定理的应用

1 B　**2** C　**3** D　**4** A

5 D [提示:由题意画出的图形如图所示。



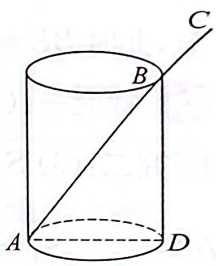
第 5 题图

在 Rt$\triangle AOB$ 中,$OB=4$ m,$AB=5$ m,所以 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(m)。在 Rt$\triangle COD$ 中,$OC=OA-AC=3-1=2$(m),$CD=AB=5$ m,所以 $OD=\sqrt{CD^2-OC^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$(m),所以 $BD=OD-OB=(\sqrt{21}-4)$m,即梯子的底端将滑动$(\sqrt{21}-4)$m。]

6 A　**7** 50　**8** 4 m　**9** 2.5　**10** 9　**11** 7.5　**12** 6(答案不唯一)　**13** 8

14 a^2, 6 [提示:因为图②中阴影部分的面积可表示为 c^2-b^2,又因为由图①可知 $a^2+b^2=c^2$,所以 $c^2-b^2=a^2$,所以图②中阴影部分的面积为 a^2;阴影部分的面积还可以表示为:$2(c-a)(c-b)+a^2-[a-(c-b)]^2$,所以 $2(c-a)(c-b)+a^2-[a-(c-b)]^2=a^2$,所以 $2(c-a)(c-b)-(a+b-c)^2=0$,所以 $(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)=2\times18=36$,所以 $a+b-c=6$ 或 $a+b-c=-6$。因为 $a+b>c$,所以 $a+b-c=6$。]

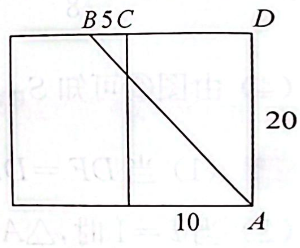
15 7 cm$\leqslant h\leqslant$16 cm [提示:如图,当筷子的底端在 D 点时,筷子露在杯子外面的长度最长,所以 $h=24-8=16$(cm);当筷子的底端在 A 点时,筷子露在杯子外面的长度最短,在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AD=15$,$BD=8$,所以 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=17$,此时 $h=24-17=7$(cm),所以 h 的取值范围是 7 cm$\leqslant h\leqslant$16 cm。]



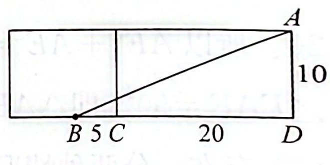
第 15 题图

16 17

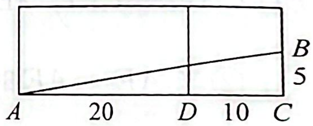
17 25 [提示:如图①,把长方体的右侧表面剪开与前面这个侧面所在的平面形成一个长方形。因为长方体的宽为 10,高为 20,点 B 离点 C 的距离是 5,所以 $BD=CD+BC=10+5=15$,$AD=20$。在直角三角形 ABD 中,根据勾股定理得 $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25$。如图②,把长方体的右侧表面剪开与上面这个侧面所在的平面形成一个长方形。因为长方体的宽为 10,高为 20,点 B 离点 C 的距离是 5,所以 $BD=CD+BC=20+5=25$,$AD=10$。在直角三角形 ABD 中,根据勾股定理得 $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{10^2+25^2}=5\sqrt{29}$。如图③,只要把长方体的上表面剪开与后面这个侧面所在的平面形成一个长方形。因为长方体的宽为 10,高为 20,点 B 离点 C 的距离是 5,所以 $AC=CD+AD=20+10=30$。在直角三角形 ABC 中,根据勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{30^2+5^2}=5\sqrt{37}$。因为 $25<5\sqrt{29}<5\sqrt{37}$,所以蚂



第 17 题图①



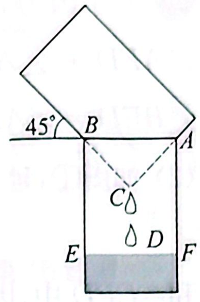
第 17 题图②



第 17 题图③

蚁爬行的最短距离是 25。]

18 65 [提示:如图,因为圆桶放置的角度与水平线的夹角为 45°,$\angle BCA=90°$,所以依题意得$\triangle ABC$ 是一个斜边为 70 cm 的等腰直角三角形,所以此三角形斜边上的高应该为 35 cm,所以水深至少应为 $100-35=65$(cm)。]



第 18 题图

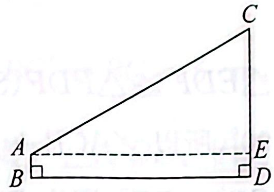
19 7200 元

20 (1) $BD=9$ 米 (2) $DE=\dfrac{36}{5}$ 米

21 圆形工件的半径为$\dfrac{25}{2}$ cm

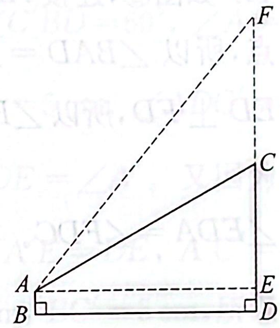
22 弯折点 B 与地面的距离为$\dfrac{3}{2}$ m

23 (1) 如图①,过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E,则 $AE=BD=15$ m,$AB=ED=1.5$ m,$\angle AEC=90°$。在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中,$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8$(m),所以 $CD=CE+CD=8+1.5=9.5$(m)。



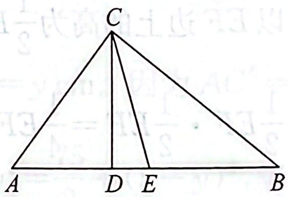
第 23 题图①

(2) 不能成功,理由如下:假设能上升 12 m,如图②,延长 DC 至点 F,连接 AF,则 $CF=12$ m,所以 $EF=CE+CF=8+12=20$(m)。在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中,$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25$(m),因为 $AC=17$ m,余线仅剩 7 m,所以 $17+7=24<25$,所以不能上升 12 m,即不能成功。



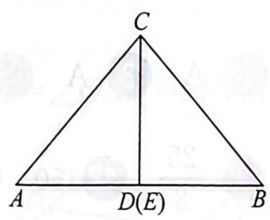
第 23 题图②

24 (1) 因为 $CD\perp AB$,所以 $\angle ADC=\angle CDB=90°$,所以 $AC^2=AD^2+CD^2=a^2+m^2$,$BC^2=CD^2+BD^2=m^2+b^2$,所以 $AC^2+BC^2=a^2+b^2+2m^2$。因为 $AC^2+BC^2=(a+b)^2$,所以$a^2+b^2+2m^2=a^2+b^2+2ab$,整理得$m^2=ab$,所以 $m=\sqrt{ab}$(取正值)。设 CE 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边上的中线。①若$\triangle ABC$ 为一般的直角三角形,如图①,则 $CE>CD$。②若$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,如图②,则 $CE=CD$。综上 $CE\geqslant CD$,即$\dfrac{a+b}{2}\geqslant m$。



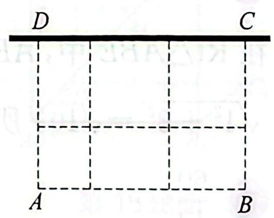
第 24 题图①

(2) 因为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积为 6,所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=6$。所以$\dfrac{a+b}{2}\cdot m=6$。因为$\dfrac{a+b}{2}\geqslant m$,所以$m^2\leqslant 6$,因为 $m>0$,所以 $m\leqslant\sqrt{6}$,所以 m 的最大值为$\sqrt{6}$。



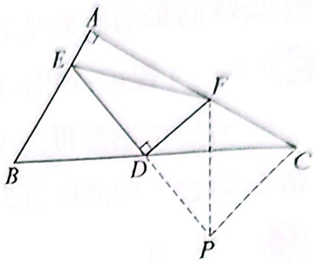
第 24 题图②

(3) 设图③中与墙平行的边 AB 长 x m,垂直于墙的边 AD 长 y m。因为面积为 32 平方米,所以 $xy=32$。由(1)得:$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,所以 $2x+4y\geqslant 2\sqrt{8xy}$,所以 $2x+4y\geqslant 2\times\sqrt{8\times 32}$。所以 $2x+4y\geqslant 32$。所以小栅栏的总长度(所有虚线长之和)最少为 32 米。



第 24 题图③

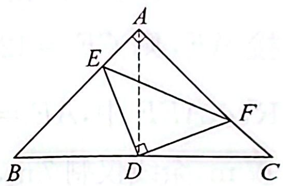
25 (1) 因为 $DE \perp DF$，所以 $\angle EDF = 90^\circ$。因为 $\angle BAC = 90^\circ$，所以 $\angle AFD + \angle AED = 180^\circ$。因为 $\angle BED + \angle AED = 180^\circ$，所以 $\angle BED = \angle AFD$。



第 25 题图①

(2) 如图①，延长 ED 到点 P，使 $DP = DE$，连接 FP、CP。在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CPD$ 中，因为 $\begin{cases} ED = PD, \\ \angle EDB = \angle PDC, \\ BD = CD, \end{cases}$ 所以 $\triangle BED \cong \triangle CPD$(SAS)，所以 $BE = CP$，$\angle B = \angle PCD$。在 $\triangle EDF$ 和 $\triangle PDF$ 中，因为 $\begin{cases} DE = DP, \\ \angle EDF = \angle PDE = 90^\circ, \\ DF = DF, \end{cases}$ 所以 $\triangle EDF \cong \triangle PDF$(SAS)，所以 $EF = FP$。因为 $\angle B = \angle DCP$，$\angle A = 90^\circ$，所以 $\angle B + \angle ACB = 90^\circ$，所以 $\angle ACB + \angle DCP = 90^\circ$，即 $\angle FCP = 90^\circ$。在 $\mathrm{Rt}\triangle FCP$ 中，根据勾股定理得：$CF^2 + CP^2 = PF^2$，因为 $BE = CP$，$PF = EF$，所以 $EF^2 = BE^2 + CF^2$。

(3) 如图②，连接 AD。因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，D 为 BC 的中点，所以 $\angle BAD = \angle FCD = 45^\circ$，$AD = BD = CD$，$AD \perp BC$，因为 $ED \perp FD$，所以 $\angle EDA + \angle ADF = 90^\circ$，$\angle ADF + \angle FDC = 90^\circ$，所以 $\angle EDA = \angle FDC$。在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 中，因为 $\begin{cases} \angle EAD = \angle FCD, \\ AD = DC, \\ \angle ADE = \angle CDF, \end{cases}$ 所以 $\triangle AED \cong \triangle CFD$(ASA)，所以 $AE = CF = 5$，$DE = DF$，即 $\triangle EDF$ 为等腰直角三角形，所以 EF 边上的高为 $\frac{1}{2}EF$。由(2)知，$EF^2 = BE^2 + CF^2 = 144 + 25 = 169$，所以 $EF = 13$，则 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}EF \cdot \frac{1}{2}EF = \frac{1}{4}EF^2 = \frac{169}{4}$。



第 25 题图②

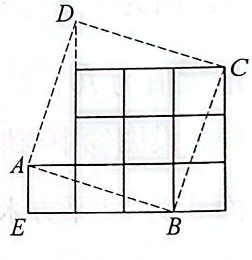
单元练习二十二

1 A **2** A **3** D **4** A **5** C **6** D **7** 48 **8** $\frac{13}{6}$ **9** $\sqrt{5}$ **10** 21 或 9

11 $\frac{25}{8}$ **12** 50 **13** 2

14 $\sqrt{10}$ [提示：如图，设左下角的字母为 E。

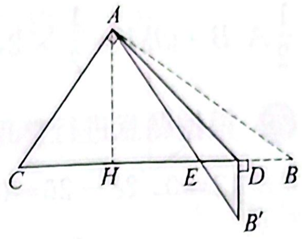
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE = 1$，$BE = 3$，$\angle AEB = 90^\circ$，所以 $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$，所以正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{10}$。]



第 14 题图

15 $\frac{60}{13}$

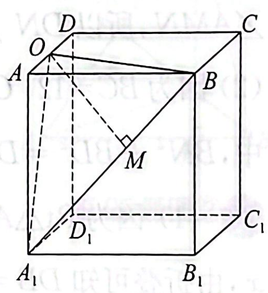
16 1.6 ［提示：如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H。因为 $\angle BAC=90^\circ$，$AC=6$，$AB=8$，所以 $BC=10$。因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}BC\cdot AH$，即 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 10AH$，解得 $AH=4.8$。所以 $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=6.4$。因为将 $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠得到 $\triangle AB'D$，所以 $\angle ADB=\angle ADB'$。因为 $B'D\perp BC$，所以 $\angle BDB'=90^\circ$，所以 $\angle ADB=\angle ADB'=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle BDB')=135^\circ$，所以 $\angle ADH=180^\circ-\angle ADB=45^\circ$，所以 $\angle DAH=90^\circ-\angle ADH=45^\circ=\angle ADH$，所以 $DH=AH=4.8$，所以 $BD=BH-DH=6.4-4.8=1.6$。］



第 16 题图

17 $DE=\frac{10}{3}$ ［提示：由折叠，可知 $\angle CBD=\angle C'BD$，$DC=DC'$，$BC'=BC=5\text{ cm}$，$\angle BC'D=\angle C=90^\circ$，$AD=A'D$，$AE=A'E$，$\angle A'=\angle A=30^\circ$，$\angle ADE=\angle A'DE$。因为 $\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，所以 $\angle ABC=60^\circ$，$\angle AC'D=\angle BC'D=90^\circ$。所以 $\angle A'C'E=90^\circ$，$\angle CBD=\angle C'BD=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$。所以 $\angle BDC'=180^\circ-\angle BC'D-\angle C'BD=60^\circ$，$\angle A=\angle C'BD$。又因为 $DC'=DC'$，所以 $\triangle ADC'\cong\triangle BDC'$。所以 $AC'=BC'=5\text{ cm}$，$\angle ADC'=\angle BDC'=60^\circ$。所以 $\angle ADE=\angle A'DE=\frac{1}{2}\angle ADC'=30^\circ$。所以 $\angle C'DE=\angle A'$。又因为 $\angle A'C'E=\angle DC'E=90^\circ$，$EC'=EC'$，所以 $\triangle A'C'E\cong\triangle DC'E$。所以 $A'E=DE$，$A'C'=DC'$。设 $DC'=x\text{ cm}$，则 $A'D=2x\text{ cm}$，所以 $AC=3x\text{ cm}$。因为 $AC'=5\text{ cm}$，$BC'=5\text{ cm}$，所以 $AB=10\text{ cm}$。因为在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $(3x)^2+5^2=10^2$，则 $x^2=\frac{75}{9}$，即 $DC'^2=\frac{75}{9}$。设 $DE=y\text{ cm}$，因为 $AE=A'E$，$A'E=DE$，所以 $AE=DE=y\text{ cm}$。因为 $AC'=5\text{ cm}$，所以 $EC'=(5-y)\text{ cm}$。在 $\text{Rt}\triangle DEC'$ 中，$DE^2=DC'^2+EC'^2$，即 $y^2=\frac{75}{9}+(5-y)^2$，解得 $y=\frac{10}{3}$。所以 $DE=\frac{10}{3}$。］

18 $\sqrt{6}$ ［提示：因为正方体的棱长为 2，所以 $AA_1=AB=AD=2$，$\angle A_1AO=\angle OAB=90^\circ$，因为 O 为 AD 的中点，所以 $AO=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 2=1$，所以 $OA_1=\sqrt{AA_1^2+OA^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$OB=\sqrt{AB^2+OA^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$A_1B=\sqrt{AA_1^2+AB^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以 $\triangle OA_1B$ 是等腰三角形。如图，过点 O 作 $OM\perp A_1B$ 于点 M，所以 $A_1M=BM=\frac{1}{2}A_1B=\sqrt{2}$。在 $\text{Rt}\triangle OA_1M$ 中，$OM=\sqrt{OA_1^2-A_1M^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle OA_1B}=$

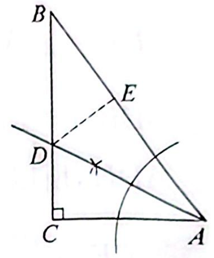


第 18 题图

$\frac{1}{2}A_1B \cdot OM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$，即 O、A_1、B 三点为顶点的三角形面积为$\sqrt{6}$。]

19 根据题意进行整理：$|a-5|+(b-12)^2+\sqrt{2c-26}=0$，由非负数的性质可知，$a-5=0$，$b-12=0$，$2c-26=0$，所以 $a=5$，$b=12$，$c=13$。因为$5^2+12^2=13^2$，所以该三角形是直角三角形，所以 $S=\frac{1}{2}\times 5\times 12=30$。

20 (1) 如图，点 D 即为所求。



第 20 题图

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，因为 $BC=4$，$AC=3$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，因为 $\angle DCA=\angle DEA=90°$，$\angle CAD=\angle EAD$，$AD=AD$，所以 $\triangle CAD \cong \triangle EAD$(AAS)，所以 $CD=DE$，$AC=AE=3$，所以 $BE=5-3=2$。设 $CD=DE=m$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，因为 $BD^2=BE^2+DE^2$，所以$(4-m)^2=m^2+2^2$，解得 $m=\frac{3}{2}$。所以 $CD=\frac{3}{2}$。

21 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是长方形，$AB=5$，$AD=12$，所以 $AD=BC=12$，$\angle B=90°$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$。由折叠得 $AB'=AB=5$，$BE=B'E=12-CE$，$\angle AB'E=\angle B=90°$，所以 $B'C=AC-AB'=13-5=8$，$\angle EB'C=90°$。在 $\mathrm{Rt}\triangle EB'C$ 中，由勾股定理得 $B'E^2+B'C^2=CE^2$，即$(12-CE)^2+8^2=CE^2$，解得 $CE=\frac{26}{3}$。

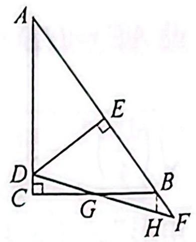
(2) 因为四边形 $ABCD$ 是长方形，$AB=6$，$AD=13$，$AF=3$，所以 $AB=CD=6$，$AD=BC=13$，$AD /\!/ BC$，$\angle C=90°$，$DF=AD-AF=13-3=10$，所以 $\angle DFE=\angle BEF$。由折叠得 $\angle DEF=\angle BEF$，$B'E=BE$，所以 $\angle DFE=\angle DEF$，所以 $DE=DF=10$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 中，$CE=\sqrt{ED^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，所以 $B'E=BE=BC-CE=13-8=5$，所以 $B'D=DE-B'E=10-5=5$。

22 (1) $DN=AM$ 且 $DN /\!/ AM$。理由如下：由翻折可知 $\triangle ANM \cong \triangle DNM$，所以 $\angle ANM=\angle DNM$，$\angle DMN=\angle AMN$，$AM=DM$。因为 $MD \perp BC$，所以 $\angle MDC=\angle ABC=90°$，所以 $MD /\!/ AB$，所以 $\angle ANM=\angle DMN$，所以 $\angle DNM=\angle DMN$，所以 $MD=ND$。又因为 $AM=DM$，所以 $DN=AM$。因为 $\angle DNM=\angle DMN$，$\angle DMN=\angle AMN$，所以 $\angle DNM=\angle AMN$，所以 $DN /\!/ AM$。

(2) 因为 $BC=12$，$CD=2BD$，所以 $BD=4$，$CD=8$。设 $BN=x$，则 $AN=5-x$。在 $\mathrm{Rt}\triangle BND$ 中，$BN^2+BD^2=DN^2$，所以$x^2+4^2=(5-x)^2$，所以 $x=0.9$，即 BN 的长度为 0.9。

23 (1) 因为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，所以 $AB=10$，设 $AD=x$，则 $CD=8-x$，由折叠可知 $DB=AD=x$。在 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 中，$CD^2+BC^2=DB^2$，即$(8-x)^2+6^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{4}$。所以 AD 的长为$\frac{25}{4}$

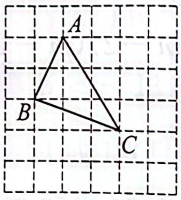
(2) 如图，过点 B 作 $BH\perp BC$ 交 DF 于点 H。在 $\triangle DGC$ 与 $\triangle HBG$ 中，因为 $\begin{cases}\angle DCB=\angle HBG,\\ \angle DGC=\angle BGH,\\ CG=BG,\end{cases}$ 所以 $\triangle DGC\cong\triangle HGB(\text{AAS})$，所以 $DC=BH$，$DG=GH$，$\angle CDG=\angle BHG$，所以 $AC\parallel BH$，所以 $\angle A=\angle HBF$。由折叠可知 $\angle A=\angle F$，所以 $\angle HBF=\angle F$，所以 $HB=HF$。设 $CD=y$，则 $AD=DF=8-y$，$HF=y$，所以 $DG=\dfrac{1}{2}DH=\dfrac{1}{2}(8-y-y)=4-y$，在 $\text{Rt}\triangle DCG$ 中，$CD^2+GC^2=DG^2$，$y^2+3^2=(4-y)^2$，解得 $y=\dfrac{7}{8}$，所以 $AD=8-y=\dfrac{57}{8}$，即 AD 的长为 $\dfrac{57}{8}$。



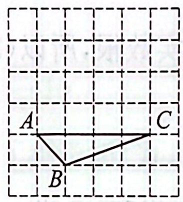
第 23 题图

24 (1) 2.5 (2) $\triangle ABC$ 即为所求，如图①。

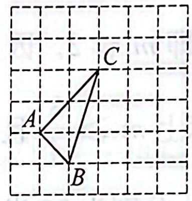
(3) 如图②。由图可知，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{10}$，$S_{\triangle ABC}=2$，$AC=4$，此时第三条边长为 4。如图③。由图可知，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{10}$，$S_{\triangle ABC}=2$，$AC=2\sqrt{2}$，此时第三条边长为 $2\sqrt{2}$。综上所述，第三条边长为 4 或 $2\sqrt{2}$。



第 24 题图①



第 24 题图②

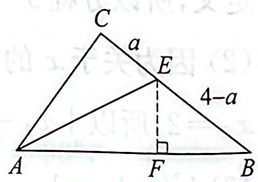


第 24 题图③

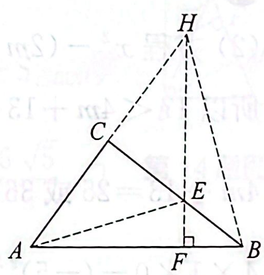
25 (1) 15

(2) 因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle B+\angle CAB=90^\circ$。又因为 $\angle CAB+\angle CAD=90^\circ$，所以 $\angle B=\angle CAD$，所以 $\angle B+\angle CAD+\angle BAD=2\angle B+\angle BAD=90^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 是倍角互余三角形。

(3) ①如图①，当 AE 平分 $\angle CAB$ 时，则 $2\angle EAB+\angle B=90^\circ$，$\angle CAE=\angle FAE$，$\angle ACE=\angle AFE$，$AE=AE$，所以 $\triangle ACE\cong\triangle AFE$，所以 $AF=AC=3$，则 $BF=2$。设 $CE=a$，则 $EF=a$，$BE=4-a$。在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中，$(4-a)^2=a^2+2^2$，解得 $a=\dfrac{3}{2}$，所以 $BE=4-a=\dfrac{5}{2}$。②如图②，当 $\angle CAE=\angle B$ 时，作点 A 关于 BC 的对称点 H，连接 AE、HE，并延长 HE 交 AB 于点 F。设 $\angle CAE=x$，则 $\angle ABC=x$，因为点 A、点 H 关于 BC 对称，所以 $\angle AHE=\angle CAE=x$，所以 $\angle CEH=90^\circ-x=\angle BEF$，所以 $\angle BEF+\angle ABC=90^\circ$，即 $HF\perp AB$，利用等积法可得 $S_{\triangle ABH}=AH\times BC\times\dfrac{1}{2}=AB\times HF\times\dfrac{1}{2}$，所以 $HF=\dfrac{24}{5}$。在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中，$AF=\sqrt{AH^2-HF^2}=\dfrac{18}{5}$。



第 25 题图①



第 25 题图②

设 $AE=HE=a$，在 Rt$\triangle AEF$ 中，$a^2=\left(\frac{24}{5}-a\right)^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2$，所以 $a=\frac{15}{4}$。在 Rt$\triangle ACE$ 中，$CE=\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2-3^2}=\frac{9}{4}$，所以 $BE=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$。综上所述，$BE=\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$ 时，$\triangle ABE$ 为“倍角互余三角形”。

期中练习

1 C 2 D 3 B 4 B 5 B 6 C

7 $\frac{\sqrt{72}}{2}$ 8 $2-\sqrt{3}$ 9 (1) $\frac{4}{11}$ (2) $\frac{367}{3330}$ 10 $x>-3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

11 10 12 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13 2 14 $<$ 15 $x>4$ 16 $2\sqrt{3}$

17 4 18 15 和 35

19 4 20 $b+c$ 21 $x_1=1$，$x_2=-3-2\sqrt{2}$ 22 $x_1=101$，$x_2=-99$

23 将原方程整理得：$(m-2)x^2+(2m+1)x+m-2=0$。因为原方程是一元二次方程，所以 $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$。因为方程有两个实数根，所以 $(2m+1)^2-4(m-2)(m-2)\geqslant 0$，解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$。综上 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 且 $m\neq 2$。

24 (1) 两边分别为 96 米和 12 米，或 24 米和 48 米 (2) 两边分别为 30 米和 60 米 (3) 无解，不可能按要求完成仓库。

25 (1) $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=1$。因为 $x_1-x_2=2-1=1$，所以符合连根方程的定义，所以方程 $x^2-3x+2=0$ 是“连根方程”。

(2) 因为关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-2m=0$（m 是常数）是连根方程，解方程可得：$x_1=-m$，$x_2=2$，所以 $|x_1-x_2|=|-m-2|=1$，所以 $m=-1$ 或 -3。

(3) $b^2-4c=1$。

26 (1) -4

(2) 方程 $x^2-(2m-1)x+m^2-2m-3=0$，所以 $\Delta=b^2-4ac=4m+13$。因为 $1<m<6$，所以 $17<4m+13<37$。又因为方程 $x^2-(2m-1)x+m^2-2m-3=0$ 是“快乐方程”，所以 $4m+13=25$ 或 36，所以 $m=3$ 或 $m=\frac{23}{4}$（舍去），所以方程为：$x^2-5x=0$，则 $F(1,-5,0)=\frac{4\times1\times0-(-5)^2}{4\times1}=-\frac{25}{4}$，故其“快乐数”数是 $-\frac{25}{4}$。

(3) $x^2-mx+m+1=0$，所以 $\Delta=(-m)^2-4(m+1)=(m-2)^2-8$，设 $\Delta=a^2$，则 $(m-2+a)(m-2-a)=8$，又因为 $m-2+a$ 与 $m-2-a$ 同奇偶，所以 $\begin{cases}m-2+a=4,\\m-2-a=2\end{cases}$ 或

$\begin{cases} m-2+a=2, \\ m-2-a=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m-2+a=-4, \\ m-2-a=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m-2+a=-2, \\ m-2-a=-4, \end{cases}$ 解得 $m=5$ 或 -1。所以方程为：$x^2-5x+6=0$ 或 $x^2+x=0$；$x^2-(n+2)x+2n=0$，所以 $\Delta=(n-2)^2$，$F(1, -n-2, 2n)=\dfrac{4\times1\times2n-(-n-2)^2}{4\times1}=-\dfrac{(n-2)^2}{4}$。当 $m=5$ 时，$F(1, -5, 6)=\dfrac{4\times1\times6-(-5)^2}{4\times1}=-\dfrac{1}{4}$。因为两方程的“快乐数”互为“开心数”，所以 $\left|-\dfrac{1}{4}\times2n-6\times\left[-\dfrac{(n-2)^2}{4}\right]\right|=0$，解得 $n=3$ 或 $\dfrac{4}{3}$（舍去）；当 $m=-1$ 时，$F(1, 1, 0)=\dfrac{4\times1\times0-1^2}{4\times1}=-\dfrac{1}{4}$，因为两方程的“快乐数”互为“开心数”，所以 $\left|-\dfrac{1}{4}\times2n-0\times\left[-\dfrac{(n-2)^2}{4}\right]\right|=0$，解得 $n=0$。综上，n 的值为 0 或 3。

期末练习

1 A　2 D　3 B　4 B　5 C　6 D　7 3　8 $x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

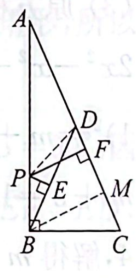
9 $2\left(x-\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}\right)$

10 177　11 $a<-13$ 或 $-13<a<-10$

12 2 或 9 或 14 或 17（只填一个即可）［提示：因为 n 是正整数，且 $\sqrt{18-n}$ 也是正整数，所以 $18-n$ 是一个完全平方数，因为 $18-n\geqslant0$，解得：$n\leqslant18$，所以 $0<n\leqslant18$，则 $18-n=1^2$，解得：$n=17$；或 $18-n=2^2$，解得：$n=14$；或 $18-n=3^2$，解得：$n=9$；或 $18-n=4^2$，解得：$n=2$；当 $18-n=5^2$ 时，解得：$n=-7$，不符合 n 的范围。故答案为：2 或 9 或 14 或 17（只填一个即可）。］

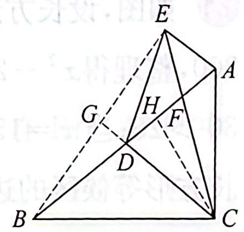
13 $3\sqrt{2}$

14 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$　［提示：如图，作 $BM\perp AC$ 于点 M，连接 PD。因为 $\angle ABC=90°$，$AD=DC$，$AB=6$，$BC=3$，所以 $BD=AD=DC$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=3\sqrt{5}$。因为 $\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BM$，所以 $BM=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$。因为 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADP}+S_{\triangle BDP}$，所以 $\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot BM=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot PF+\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot PE$，所以 $PE+PF=BM=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$。］



第 14 题图

15 $2\sqrt{2}$　［提示：如图，连接 BE，延长 CD 交 BE 于点 G，作 $CH\perp AB$ 于点 H。由折叠的性质可得：$BD=DE$，$CB=CE$，则 CG 为 BE 的中垂线，所以 $BG=\dfrac{1}{2}BE$。因为 D 为 AB 中点，所以 $BD=AD$，$S_{\triangle CBD}=S_{\triangle CAD}$，$AD=DE$，所以 $\angle DBE=\angle DEB$，$\angle DEA=\angle DAE$，因为 $\angle EDA+\angle DEA+$



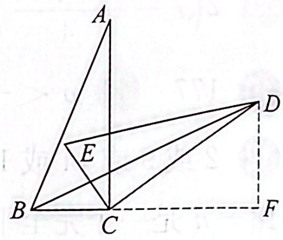
第 16 题图

$\angle DAE=180^\circ$，即 $2\angle DEB+2\angle DEA=180^\circ$，所以 $\angle DEB+\angle DEA=90^\circ$，即 $\angle BEA=90^\circ$。在直角三角形 AEB 中，由勾股定理可得：$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，所以 $BG=2\sqrt{2}$。因为 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BDC}$，所以 $\frac{1}{2}\times AB\cdot CH=2\times\frac{1}{2}\times CD\cdot BG$，所以 $3CH=2\times\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}$，所以 $CH=2\sqrt{2}$。]

16 1 [提示：因为 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+(3k+1)x+2k^2+1=0$ 的两个实数根，所以 $x_1+x_2=-(3k+1)$，$x_1x_2=2k^2+1$。因为 $(x_1-1)(x_2-1)=8k^2$，即 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1=8k^2$，所以 $2k^2+1+3k+1+1=8k^2$，整理得 $2k^2-k-1=0$，解得 $k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=1$。因为关于 x 的方程 $x^2+(3k+1)x+2k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根，所以 $\Delta=(3k+1)^2-4\times1\times(2k^2+1)>0$，解得 $k<-3-2\sqrt{3}$ 或 $k>-3+2\sqrt{3}$，所以 $k=1$。]

17 8 [提示：由 $\Delta\geqslant0$，可得 $4-4(m+6)\geqslant0$，解得 $m\leqslant-5$。由韦达定理，可得 $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=m+6$，所以 $(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2=4-2(m+6)+4+2=-2m-2$。所以当 $m=-5$ 时，最小值为 8。]

18 $\sqrt{93}$ [提示：如图，过点 D 作 $DF\perp BC$，交 BC 的延长线于点 F。因为将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$，所以 $\angle ACD=60^\circ$，$AC=CD=4\sqrt{3}$，所以 $\angle DCF=30^\circ$。因为 $DF\perp BF$，所以 $DF=\frac{1}{2}DC=2\sqrt{3}$，$CF=\sqrt{3}DF=6$，所以 $BF=BC+CF=9$，所以 $BD=\sqrt{BF^2+DF^2}=\sqrt{81+12}=\sqrt{93}$。]



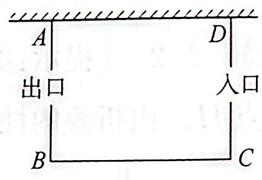
第 18 题图

19 (1) 原式 $=4\sqrt{5}$ (2) 原式 $=8-4\sqrt{3}$

20 (1) $x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ (2) $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$，$x_3=2$，$x_4=-\frac{1}{2}$

(3) 原方程去分母得：$2x^2-(m+1)=(x+1)^2$，去括号得：$2x^2-m-1=x^2+2x+1$，移项得：$2x^2-x^2-2x=1+1+m$，合并同类项得：$x^2-2x=m+2$，所以 $x^2-2x+1=m+3$，所以 $(x-1)^2=m+3$，所以当 $m<-3$ 时，原方程无解；当 $m\geqslant-3$ 时，$x=1\pm\sqrt{m+3}$，当 $x=0$ 时，则 $m+3=1$，解得 $m=-2$，当 $m=-2$ 时，解得 $x=2$ 或 $x=0$(舍去)；当 $x=-1$ 时，则 $m+3=4$，解得 $m=1$，当 $m=1$ 时，解得 $x=3$ 或 $x=-1$(舍去)。综上所述，当 $m<-3$ 时，原方程无解，当 $m\geqslant-3$ 时，原方程的解为 $x=1\pm\sqrt{m+3}$ 且 $x\neq0$ 且 $x\neq-1$。

21 如图，设长方形等候区的边 AB 为 x 米。由题意得 $x(48-2x+2)=300$，整理得 $x^2-25x+150=0$，解得 $x_1=10$，$x_2=15$。当 $x=10$ 时，$BC=30>26$；当 $x=15$ 时，$BC=20<26$，所以 $x=10$ 不合题意，应舍去。所以长方形等候区的边 AB 为 15 米，BC 为 20 米。

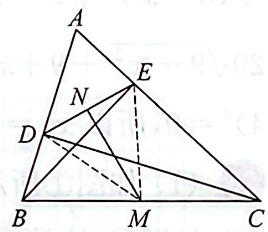


第 21 题图

22 (1) $AD \perp BD$，$\angle ABC=45^\circ$，所以$AD=BD$。因为$\angle BFD=\angle AFE$，$\angle AFE+\angle CAD=90^\circ$，$\angle CAD+\angle ACD=90^\circ$，所以$\angle BFD=\angle ACD$。在$\mathrm{Rt}\triangle BDF$和$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，因为$\begin{cases}\angle BFD=\angle ACD,\\ \angle BDF=\angle ADC=90^\circ,\\ BD=AD,\end{cases}$所以$\mathrm{Rt}\triangle BDF\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$(AAS)，所以$BF=AC$。因为$G$为$BF$的中点，所以$DG=\dfrac{1}{2}BF$。因为$AB=CB$，$BE\perp AC$，所以$E$为$AC$的中点，所以$DE=\dfrac{1}{2}AC$，所以$DG=DE$。

(2) 由(1)知：$\angle DBG=\angle DAE$，$BG=\dfrac{1}{2}BF$，$AE=\dfrac{1}{2}AC$，$BF=AC$，所以$BG=AE$。在$\triangle BDG$和$\triangle ADE$中，因为$\begin{cases}BD=AD,\\ \angle DBG=\angle DAE,\\ BG=AE,\end{cases}$所以$\triangle BDG\cong\triangle ADE$(SAS)，所以$\angle BDG=\angle ADE$，所以$\angle DGE=\angle DBG+\angle BDG$。因为$\angle DEC=\angle DAE+\angle ADE$，所以$\angle DGE=\angle DEC$，因为$DG=DE$，所以$\angle DGE=\angle DEG$，所以$\angle DEG=\angle DEC$。

23 (1) 如图，连接DM、EM。因为CD、BE分别是AB、AC边上的高，所以$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$与$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，M是线段BC的中点，所以$DM=\dfrac{1}{2}BC$，$EM=\dfrac{1}{2}BC$，所以$DM=EM$，所以$\triangle DEM$是等腰三角形，又因为N是线段DE的中点，$MN\perp DE$。



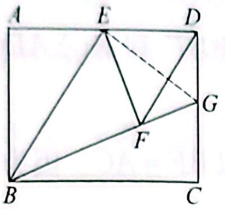
第23题图

(2) 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=120^\circ$，由(1)可知：$MB=MD=ME=MC$，所以$\angle ABC=\angle BDM$，$\angle ACB=\angle MEC$，所以$\angle DMB=180^\circ-\angle ABC-\angle BDM=180^\circ-2\angle ABC$，所以$\angle CME=180^\circ-\angle ACB-\angle MEC=180^\circ-2\angle ACB$，所以$\angle DME=180^\circ-(180^\circ-2\angle ABC)-(180^\circ-2\angle ACB)=2\angle ABC+2\angle ACB-180^\circ=2(\angle ABC+\angle ACB)-180^\circ=2\times120^\circ-180^\circ=60^\circ$。由(1)可知$\triangle DEM$是等腰三角形，所以$\triangle DEM$是等边三角形。

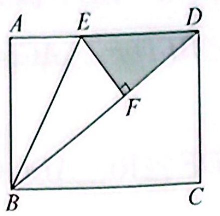
24 (1) ① 证明：如图①中，连接EG，因为四边形$ABCD$是矩形，所以$\angle A=\angle EDG=90^\circ$，因为$EA=EF=ED$，$\angle A=\angle EFB=90^\circ$，所以$\angle EFG=\angle EDG=90^\circ$，因为$EG=EG$，$EF=ED$，所以$\mathrm{Rt}\triangle EGD\cong\mathrm{Rt}\triangle EGF$(HL)，所以$GD=GF$。

② 如图①中，设$DG=GF=x$，则$GC=6-x$。在$\mathrm{Rt}\triangle BCG$中，因为$BG^2=BC^2+CG^2$，所以$(6+x)^2=(6-x)^2+8^2$，所以$x=\dfrac{8}{3}$，所以$GF=\dfrac{8}{3}$。

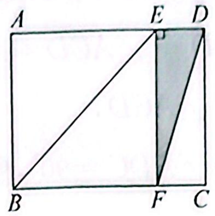
(2) 存在。如图②中，当$\angle EFD=90^\circ$时，B、F、D共线，设$AE=EF=x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$BD=10$，因为$BF=BA=6$，所以$DF=10-6=4$。在$\mathrm{Rt}\triangle EFD$中，因为$DE^2=EF^2+DF^2$，所以$(8-x)^2=x^2+4^2$，所以$x=3$，所以$AE=3$；如图③中，当$\angle FED=90^\circ$时，$AE=AB=6$。



第 24 题图①



第 24 题图②



第 24 题图③

综上所述，满足条件的 AE 的值为 3 或 6。

25 (1) -2，1

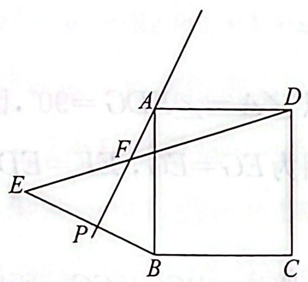
(2) $\sqrt{2x+3}=x$，方程的两边平方，得 $2x+3=x^2$，即 $x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-1$。因为当 $x=-1$ 时，$\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq-1$，所以 -1 不是原方程的解。所以方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$。

(3) 因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以 $\angle A=\angle D=90°$，$AB=CD=3$ m，设 $AP=x$ m，则 $PD=(8-x)$ m，因为 $BP+CP=10$，$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}$，$CP=\sqrt{CD^2+PD^2}$，所以 $\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$，所以 $\sqrt{(8-x)^2+9}=10-\sqrt{9+x^2}$，两边平方，得 $(8-x)^2+9=100-20\sqrt{9+x^2}+9+x^2$，整理得 $5\sqrt{x^2+9}=4x+9$，两边平方并整理，得 $x^2-8x+16=0$，即 $(x-4)^2=0$，所以 $x_1=x_2=4$。经检验，$x_1=x_2=4$ 是方程的解。所以 AP 的长为 4 m。

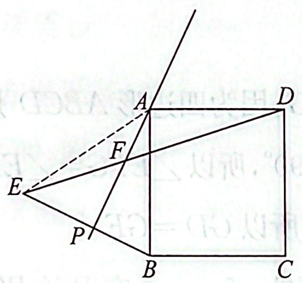
26 (1) 如图①所示。

(2) 如图②，连接 AE，则 $\angle PAB=\angle PAE=20°$，$AE=AB=AD$。因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle BAD=90°$，所以 $\angle EAD=130°$，所以 $\angle ADF=\dfrac{180°-130°}{2}=25°$。

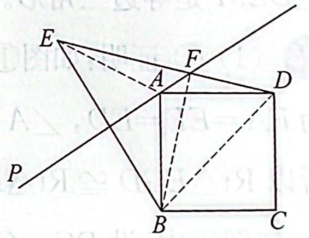
(3) $EF^2+FD^2=2AB^2$。证明：如图③，连接 AE、BF、BD，由轴对称的性质可得：$EF=BF$，$AE=AB=AD$，$\angle ABF=\angle AEF=\angle ADF$，所以 $\angle BFD=\angle BAD=90°$，所以 $BF^2+FD^2=BD^2$，所以 $EF^2+FD^2=2AB^2$。



第 26 题图①



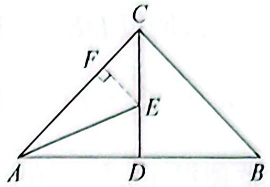
第 26 题图②



第 26 题图③

27 (1) ① 因为 AE 平分 $\angle CAB$，所以 $\angle CAE=\angle BAE$。又因为 ED 是 AB 的垂直平分线，所以 $EA=EB$，所以 $\angle B=\angle DAE$，所以 $\angle CAE=\angle DAE=\angle B$。又因为 $\angle C=90°$，所以 $\angle B=\dfrac{1}{3}\times90°=30°$。

② 因为 AE 平分 $\angle CAB$，且 $EC \perp AC$，$ED \perp AB$，所以 $EC = ED$。在 $Rt\triangle EDB$ 中，$\angle B = 30°$，所以 $BE = 2DE$，$BC = BE + CE = BE + DE = 3DE$。



第 27 题图

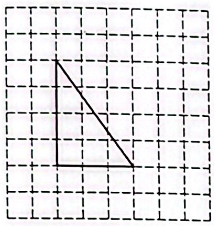
(2) 线段 AD、DE、BC 之间满足 $AD + DE = BC$。证明如下：过点 E 作 $EF \perp AC$ 于点 F。因为 ED 是 AB 的垂直平分线，且 C、E、D 共线，所以 CD 也是 AB 的垂直平分线，所以 $CA = CB$。又因为 $\angle ACB = 90°$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle ACD = 45°$，所以 $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，所以 $EF = CF$。因为 AE 平分 $\angle CAB$，且 $EF \perp AC$，$ED \perp AB$，所以 $EF = ED$，所以 $ED = FC$。在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle AFE$ 中，因为 $\begin{cases} EF = ED, \\ AE = AE, \end{cases}$ 所以 $Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle AFE$(HL)，所以 $AD = AF$，所以 $BC = AC = AF + FC = AD + DE$。

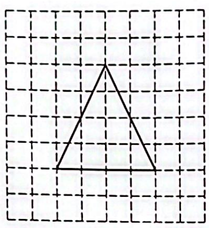
28 (1) 如图①所示。

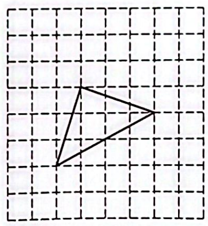
(2) 如图②所示。

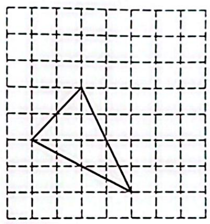
(3) 如图③所示。

(4) 如图④所示。


第 28 题图①

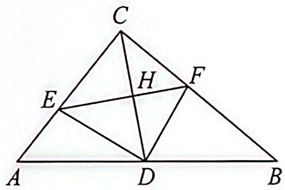

第 28 题图②


第 28 题图③


第 28 题图④

29 (1) 4.8

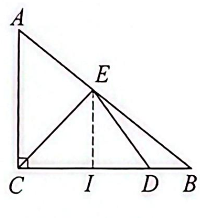
(2) 根据折叠的性质知，EF 是 CD 的垂直平分线，即 $CH = HD$，$CD \perp EF$。



第 29 题图①

因为 $\angle ACB = 90°$，$EC = 4$，$FC = 3$，所以 $EF = \sqrt{EC^2 + FC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$。因为 $\frac{1}{2} EF \times CH = \frac{1}{2} EC \times FC$，所以 $CH = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4$，所以 $CD = 2CH = 4.8$。因为 CD 是斜边的中线，所以 $AB = 2CD = 9.6$。

(3) 补充图形如图②所示。过点 E 作 $EI \perp BC$ 于点 I，根据折叠的性质知，$AC = CD = 3$，$AE = ED$，$\angle ACE = \angle DCE = \frac{1}{2} \angle ACD = 45°$，所以 $\triangle CEI$ 为等腰直角三角形，即 $CI = EI$。因为 $\angle ACB = 90°$，$CA = 3$，$BC = 4$，所以 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$。设 $CI = EI = a$，则 $CE = \sqrt{2}a$，$DI = 3 - a$，$BI =$



第 29 题图②

$4-a$，所以 $DE=\sqrt{EI^2+DI^2}=\sqrt{a^2+(3-a)^2}$，所以 $AE=ED=\sqrt{a^2+(3-a)^2}$，则 $BE=5-\sqrt{a^2+(3-a)^2}$。在 $\mathrm{Rt}\triangle BEI$ 中，$EI^2+BI^2=BE^2$，即 $a^2+(4-a)^2=(5-\sqrt{a^2+(3-a)^2})^2$，整理得 $49a^2-168a+144=0$，即 $(7a-12)^2=0$，解得 $a=\dfrac{12}{7}$。所以 $CE=\sqrt{2}a=\dfrac{12}{7}\sqrt{2}$。